

Oversigt

over det

Kongelige Danske

Videnskabernes Selskabs

Forhandlinger

og

dets Medlemmers Arbejder

i Aaret 1876.

Med Bilag af Bogliste

samt med en

Résumé du Bulletin de l'Académie Royale Danoise des Sciences
et des Lettres.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

Aargangens enkelte Numere udkom :

Nr. 1 : S. (5)-(25) og S. 1-40, d. 1. Juli 1876.

Nr. 2 : S. (26)-(52), d. 7. December 1876.

Nr. 3 : S. (53)-(64) og S. 41-255, d. 15. Juli 1878.



Over­sig­
t
over det
Kongelige Danske
Videnskaberne Selskabs
Forhandlinger
og
dets Medlemmers Arbejder
i Aaret 1876.

Med Bilag af Bogliste samt med en
Résumé du Bulletin de l'Académie Royale Danoise des Sciences
et des Lettres pour l'année 1876.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1876—78.

Redaktionen har fundet det hensigtsmæssigt at foretage en bestemt Sondring imellem Beretningerne om Forhandlingerne i Selskabets Møder og de i disse Hæfter meddelte Udtog af Afhandlinger eller mindre Afhandlinger, og at give hver Afdeling sin egen Paginering. For at forebygge Forvirring ere Sidetallene i den første Afdeling udmærkede ved et Blad-Ornament. Ved Henvisninger vil et Parenthes-tegn blive brugt i Stedet for Ornamentet, saaledes at f. E. (3) betyder  3 .

Aargangens enkelte Numere udkom:

Nr. 1: den 1ste Juli 1876.

Nr. 2: den 7de December 1876.

Nr. 3: den 15de Juli 1878.

Indholdsfortegnelse

til Aargangen 1876.

	Side
Indholdsfortegnelse	(3)-(4).
Liste over Selskabets Medlemmer, Embedsmænd og faste Kommissi- sioner	(5)-(11).
1. Møde, den 14de Januar. Oversigt	(12)-(13).
2. — — 28de Januar. Oversigt	(13)-(14).
3. — — 11te Februar. Oversigt	(14)-(19).
- — — — — Prisopgaver for 1876	(15)-(19).
4. — — 25de Februar. Oversigt	(19)-(20).
5. — — 10de Marts. Oversigt	(21)-(22).
6. — — 24de Marts. Oversigt	(22)-(25).
- — — — — Regnskabsoversigt for 1875	(23)-(25).
7. — — 7de April. Oversigt	(26)-(27).
8. — — 28de April. Oversigt	(28)-(29).
Overordentligt Møde den 29de September (Carlsbergfondet)	(30)-(45).
9. Møde, den 13de Oktober. Oversigt	(46)-(50).
Overordentligt Møde den 27de Oktober (Carlsbergfondet)	(51).
10. Møde, den 27de Oktober. Oversigt	(52).
11. — — 10de November. Oversigt	(53)-(54).
12. — — 24de November. Oversigt	(54)-(55).
13. — — 8de December. Oversigt	(55)-(56).
14. — — 22de December. Oversigt	(57)-(60).
- — — — — Budget for 1877	(57)-(59).
Tilbageblik paa Aaret 1876	(61)-(64).

Betænkninger afgivne til Selskabet:

Betænkning (<i>Steenstrup, Johnstrup, Joh. Lange</i>) angaaende Understøttelse til Adjunkt <i>Grønlund</i> til en Islandsrejse	(14).
Betænkning (<i>Steen, Lorenz, Schjellerup</i>) over Dr. <i>Tychsens</i> «Note til en Spilleropgave hos Laplace»	(21)-(22).

	Side
Betænkning (<i>Gislason, Thorsen, Grundtvig</i>) over Prof. Dr. <i>Lunds</i> gammeldanske Ordbog	(28).
Betænkning (<i>Steen, Lorenz, Zeuthen</i>) over Kaptajn <i>Buchwaldts</i> Af- handling om Differentiation med hvilkesomhelst Indices	(49)-(50).

Meddelelser:

<i>A. Colding</i> . Oversigt over Resultaterne af Undersøgelserne over de ved Vindens Kraft fremkaldte Strømninger i Havet	1-11.
<i>Camillo Tychsen</i> . En Note til et vanskeligt Punkt i Laplaces «Théori analytique des Probabilités». Paris 1814	12-23.
<i>A. F. Mehren</i> . Le Epigrafi Arabiche di Sicilia, trascrite tradotte e illustrate da Michele Amari. Palermo 1875. (Med et Atlas af fotograferede Tavler.) Fremlagt efter Forfatterens Ønske	24-40.
<i>A. Hannover</i> . <i>Funiculus scleroticae</i> , en Levning af den foetale Spalte i Menneskets Øje	41-50.
<i>F. Buchwaldt</i> . Ny Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices	51-157.
<i>J. N. Madvig</i> . Bemærkninger over T. Livius's Historieskrivning med Henblik paa den antike Historieskrivning i det Hele	158-173.
<i>Japetus Steenstrup</i> . Fortsatte Bidrag til en rigtig Opfattelse af Øje- stillingen hos Flyndrene, med fire Tavler (I—IV)	174-247.
Trykfejlsliste til <i>F. Buchwaldts</i> ovennævnte Afhandling	248.

Sag- og Navnefortegnelse	249-255.
------------------------------------	----------

Bilag:

Liste over de i 1876 indkomne Skrifter, samt over de Selskaber og Private, fra hvilke de ere modtagne	1-53.
Résumé du Bulletin de l'Académie Royale Danoise des Sciences et des Lettres	1-54.
Questions mises au concours pour l'année 1876	1-7.
<i>Funiculus scleroticae</i> , un reste de la fente foetale dans l'œil humain, par M. <i>A. Hannover</i>	8-13.
Nouvelle méthode de différentiation à indice quelconque par M. <i>F. Buchwaldt</i>	14-24.
Résumé d'un Journal Météorologique tenu à Uraniborg (Ile de Hveen) par le célèbre Astronome <i>Tycho Brahe</i> pendant les années 1582—1597. Par M. <i>Paul la Cour</i>	25-43.
<i>Fonds du Carlsberg</i> (Fondation et Statuts)	43-54.

**Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Medlemmer
ved Begyndelsen af Aaret 1876.**

Præsident: *J. N. Madvig.*
 Sekretær: *J. J. Sm. Steenstrup.*
 Redaktør: *J. L. Ussing.*
 Kasserer: *J. Th. Reinhardt.*

A. Indenlandske Medlemmer.

Den historisk-filosofiske Klasse.

- Clausen, H. N.*, Dr. theol. & phil., fh. Professor i Theologi ved
Kjøbenhavns Universitet; Stk. af Dbg., Dbmd. (²⁷/₁₂33.)
- Madvig, J. N.*, Dr. phil. Konferentsraad, Professor i klassisk
Filologi ved Kjøbenhavns Universitet; Stk. af Dbg., Dbmd. —
Selskabets Præsident. (²⁷/₁₂33.)
- Martensen, H. L.*, Dr. theol. Biskop over Sjællands Stift og Ordens-
biskop, Kongelig Konfessionarius; Stk. af Dbg., Dbmd.
(³/₁₂44.)
- Wegener, C. F.*, Dr. phil. Konferentsraad, Geheimearkivar, Kgl.
Historiograf og Ordenshistoriograf; Stk. af Dbg., Dbmd.
(¹⁵/₁₂43.)
- Paludan-Müller, C. P.*, Dr. phil. Professor i Historie ved Kjøben-
havns Universitet; K. af Dbg.², Dbmd. (¹⁵/₁₂43.)
- Scharling, C. E.*, Dr. theol. & phil. Professor i Theologi ved
Kjøbenhavns Universitet; K. af Dbg.², Dbmd. (⁵/₁₂45.)
- Engelstoft, C. T.*, Dr. theol. Biskop over Fyns Stift; Kmd. af
Dbg.¹, Dbmd. (³/₁₂47.)

- Westergaard, N. L.*, Dr. phil. Etatsraad, Professor i indisk-østerlandske Sprog ved Københavns Universitet; R. af Dbg., Dbmd. (³/₁₂47.)
- Ussing, J. L.*, Dr. phil. Professor i klassisk Filologi ved Københavns Universitet; R. af Dbg. — Selskabets Redaktør. (⁵/₁₂51.)
- Worsaae, J. J. A.*, Kammerherre, Direktør for Museet for nordiske Oldsager og for det ethnografiske Museum; Kmd. af Dbg¹. og Dbmd. (¹⁹/₃52.)
- Gislason, K.*, Dr. phil. Professor i Oldnordisk ved Københavns Universitet; R. af Dbg. (²/₁₂53.)
- Müller, C. L.*, Lic. theol., Dr. phil. Etatsraad, Bestyrer af det Kgl. Møntkabinet, Antik-Kabinetet og Thorvaldsens Museum; R. af Dbg., Dbmd. (⁵/₁₂56.)
- Schiern, F. E. A.*, Dr. phil. Professor i Historie ved Københavns Universitet; R. af Dbg. (¹⁵/₄59.)
- Thorsen, P. G.*, Professor, Bibliothekar ved Universitetsbibliotheket; R. af Dbg. (²⁴/₄63.)
- Mehren, A. M. F. van*, Dr. phil. Professor i de semitisk-østerlandske Sprog ved Københavns Universitet; R. af Dbg. (⁵/₄67.)
- Holm, E.*, Dr. phil. Professor i Historie ved Københavns Universitet; R. af Dbg. (⁵/₄67.)
- Lund, G. Fr. V.*, Dr. phil. Professor, Rektor ved Aarhus Kathedralskole; R. af Dbg. (¹⁷/₄68.)
- Grundtvig, Sv.*, Professor, Docent i de nordiske Sprog ved Københavns Universitet; R. af Dbg. (⁴/₁₂68.)
- Rørdam, H. F.*, Dr. phil. Sognepræst til Svogerslev og Kornerup i Sjælland. (⁸/₁₂71.)

Den matematisk-naturvidenskabelige Klasse:

- Lund, P. W.*, Dr. phil. Professor; Kmd. af Dbg.² (²²/₄31.)
- Bendz, H. C. B.*, Dr. med. Etatsraad, Lektor ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole; R. af Dbg., Dbmd. (¹⁰/₄40.)

- Steenstrup, J. J. Sm.*, Dr. phil. & med. Etatsraad, Professor i Zoologi ved Københavns Universitet; Kmd. af Dbg.², Dbmd. — Selskabets Sekretær. (⁴/₁₁42.)
- Schiødte, J. C.*, Professor, extr. Docent i Zoologi ved Københavns Universitet, Inspektor ved Universitetets zoologiske Museum; R. af Dbg. (¹³/₁₂44.)
- Hannover, A.*, Dr. med. Professor, praktiserende Læge i København; R. af Dbg. (¹/₄53.)
- Andræ, C. C. G.*, Geheime-Etatsraad, Direktør for Gradmaalingen; Stk. af Dbg. (¹⁵/₄53.)
- Reinhardt, J. Th.*, Professor, extr. Docent i Zoologi ved Københavns Universitet, Inspektor ved Universitetets zoologiske Museum; R. af Dbg. — Selskabets Kasserer. (¹¹/₄56.)
- Colding, L. Aug.*, LL. D. Professor, Stadsingeniør i København R. af Dbg. (¹¹/₄56.)
- Panum, P. L.*, Dr. med. Professor i Fysiologi ved Københavns Universitet; R. af Dbg. (¹⁵/₄59.)
- Holten, C. V.*, Professor i Fysik ved Københavns Universitet og Direktør for den polytekniske Lærestanstalt. R. af Dbg., Dbmd. (⁷/₁₂60.)
- Thomsen, H. P. J. Jul.*, Prof. i Kemi ved Københavns Universitet. R. af Dbg. (⁷/₁₂60.)
- Steen, A.*, Dr. phil. Professor i Matematik ved Københavns Universitet; R. af Dbg., Dbmd. (⁵/₁₂62.)
- Rink, H. J.*, Dr. phil. Justitsraad, Direktør for den Kgl. grønlandske Handel; R. af Dbg. (¹⁶/₁₂64.)
- Johnstrup, J. F.*, Professor i Mineralogi og Geologi ved Københavns Universitet; R. af Dbg. (¹⁶/₁₂64.)
- Barfoed, C. T.*, Professor, Lektor ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole; R. af Dbg. (²²/₁₂65.)
- Lange, J. M. C.*, Professor, Docent ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole; R. af Dbg. (²²/₁₂65.)
- Lorenz, L.*, Lærer ved Officerskolen; R. af Dbg. (¹⁴/₁₂66.)
- Lütken, Chr. Fr.*, Dr. phil. Assistent ved Universitetets zoologiske Museum. (²²/₄70.)

- Zeuthen, H. G.*, Dr. phil. Docent i Mathematik ved Kjøbenhavns Universitet. (6/1272.)
- Schiellerup, H. C. F. C.*, Dr. phil., Professor, Observator ved Kjøbenhavns Universitets astronomiske Observatorium. R. af Dbg. (18/473.)
- Jørgensen, S. M.*, Dr. phil. Lektor i Kemi ved Kjøbenhavns Universitet. (18/1274.)
- Schmidt, F. Th.*, Dr. med. Professor i Anatomi ved Kjøbenhavns Universitet; R. af Dbg. (16/475.)
- Oppermann, L. H. F.*, Professor, Lektor i Tysk ved Kjøbenhavns Universitet; R. af Dbg. (16/475.)
- Christiansen, C.*, Lærer i Fysik ved Søofficierskolen. (17/1275.)

B. Udenlandske Medlemmer *).

Den historisk-filosofiske Klasse:

- [*Twesten, Aug. Detl.*, Professor i Theologi i Berlin. R. af Dbg. [21/1227.]]
- [*Olshausen, J.*, Regeringsraad, i Berlin. (13/1243.)]
- Hildebrand, B. E.*, Dr. phil. Kgl. Rigsantikvar i Stockholm; R. af Dbg. (5/1245.)
- Lassen, Chr.*, Professor i orientalsk Filologi i Bonn. (11/1246.)
- Carlson, F. F.*, Dr. phil. Professor i Historie ved Upsala Universitet; R. af Dbg. (11/167.)
- Styffe, C. G.*, Dr. phil. Bibliothekar ved Universitetsbibliotheket i Upsala. (11/167.)
- Vibe, F. L.*, fh. Rektor ved Kathedralskolen i Kristiania. (11/167.)
- Rossi, Giamb. de'*, Commendatore, Direktør for de arkæologiske Samlinger i Rom. (13/1267.)
- Rawlinson, H. C.*, Generalmajor, beständig Direktør for det asiatiske Selskab i London. (17/468.)
- Tassy, Garcin de*, Medlem af det franske Institut. (17/468.)
- Böhtlingk, Otto*, Dr. phil. Akademiker i St. Petersburg. (17/468.)
- Tornberg, C. J.*, Dr. phil., Professor i Arabisk ved Lunds Universitet. (17/468.)

*) Klammerne betegne et oprindelige indenlandsk Medlem.

- Mignet, A. M.*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences morales et politiques i Paris. (17/468.)
- Martin, B. L. Henri*, Medlem af det franske Institut. (17/468.)
- Bugge, Sofus*, Professor i Kristiania. (22/470.)
- Amari, Michele*, Professor, italiensk Senator, i Firenze. (22/470.)
- Cobet, C. G.*, Professor i Leyden. (22/470.)
- Dozy, Reinhart*, Professor i Leyden. (22/470.)
- Koehne, Bernh. v.*, Friherre, kejserlig-russisk Statsraad, i St. Petersburg. (22/470.)
- Stephani, Ludolph*, kejserlig-russisk Statsraad, i St. Petersburg. (22/470.)
- Lubbock, Sir John*, Baronet, i London. (19/472.)
- Ranke, Leop. von*, Geheimeregeringsraad, Professor i Berlin. (30/475.)
- Unger, Carl R.*, Professor ved Universitetet i Kristiania. (17/1275.)

Den matematisk-naturvidenskabelige Klasse:

- Chevreul, M. E.*, Medlem af det franske Institut; R. af Dbg. (10/533.)
- Ehrenberg, C. G.*, Dr. Professor i Zoologi ved Universitetet i Berlin. (13/1239.)
- Weber, W^m.*, Dr. phil. Professor i Fysik ved Universitetet i Leipzig. (13/1239.)
- Baër, K. E. v.*, Dr. phil. & med. Akademiker i St. Petersburg. (22/1140.)
- Airy, G. B.*, Kgl. Astronom ved Observatoriet i Greenwich, Medlem af Royal Society i London. (27/1140.)
- Dumas, J. B.*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Paris; Kmd. af Dbg.¹ (4/1142.)
- Fries, El.*, Prof. emerit. i Botanik i Upsala; Kmd. af Dbg.¹ (4/1142.)
- [*Goltsche, C. M.*, Dr. med. Læge i Altona. (5/1245.)]
- Nilsson, Sv.*, Prof. emerit. i Zoologi i Lund. Stk. af Dbg. (13/1250.)
- Wöhler, Fr.*, Professor i Kemi i Göttingen, Sekretær ved det Kgl. Videnskabs-Selskab sammesteds. (7/454.)
- Milne-Edwards, H.*, Medlem af det franske Institut. (7/454.)

- [*Behn, W. F. G.*, Dr. med. & chir. fh. Professor i Anatomi og Zoologi, Dresden. (³/₄57.)]
- [*Peters, C. A. F.*, Dr. phil. Professor, Direktør for det astronomiske Observatorium i Altona; R. af Dbg. (⁹/₄58.)]
- Bunsen, R. W.*, Professor i Kemi i Heidelberg; R. af Dbg. (¹⁵/₄59.)
- Regnault, H. G.*, Professor, Direktør for Porcelænsfabriken Sèvres. (¹⁵/₄59.)
- Owen, R. D.*, Superintendent over British Museum i London. Medlem af Royal Society. (¹⁵/₄59.)
- Sabine, Edw.*, General, fh. Præsident for Royal Society i London. (²³/₁₂63.)
- Daubrée, A.*, Professor i Mineralogi ved Jardin des Plantes i Paris, Medlem af det franske Institut. (²³/₁₂63.)
- Charles, Michel*, Medlem af det franske Institut. (¹¹/₁67.)
- Liouville, Jos.*, Medlem af det franske Institut. (¹¹/₁67.)
- Malmsten, C. Joh.*, Dr. phil., forhen Professor i Matematik i Upsala, Landshøvding i Skaraborg Len; Kmd. af Dbg.¹ (¹¹/₁67.)
- Broch, O. J.*, Dr. phil., fh. Professor i Matematik i Kristiania. (¹¹/₁67.)
- Bernard, Claude*, Medlem af det franske Institut. (¹¹/₁67.)
- Edlund, Er.*, Dr. phil. Professor i Fysik ved Kgl. Sv. Vetenskaps Akademien i Stockholm. (¹¹/₁67.)
- Svanberg, L. Fr.*, Professor i Kemi i Upsala. (¹¹/₁67.)
- Hooker, J. D.*, Direktør for den Kgl. Botaniske Have i Kew. (¹¹/₁67.)
- Boeck, Chr. P. B.*, Dr. phil. & med. Professor i Fysiologi ved Kristiania Universitet. (¹⁷/₄68.)
- Le Verrier, Urb. J.-J.*, Direktør for det astronomiske Observatorium i Paris, Medlem af det franske Institut; R. af Dbg. (¹⁷/₄68.)
- Lovén, Sven*, Dr. phil. & med. Professor i Stockholm. R. af Dbg. (²²/₄70.)
- Kjerulf, Theodor*, Professor i Kristiania. (²²/₄70.)
- De Candolle, Alphonse*, fh. Professor ved Akademiet i Genève. (²²/₄70.)

Agardh, J. G., Dr. phil. Professor i Botanik ved Lunds Univer-
(18/473.)

Huggins, William, Dr. phil. Fysisk Astronom i London. (18/473.)

Joule, J. P., Dr. phil. Fysiker i Manchester. (18/473.)

Cayley, Arthur, Dr. phil. Professor i Mathematik ved Universi-
tetet i Cambridge. (5/1273.)

Haan, David Bierens de, Dr. phil. Professor i Mathematik ved
Universitetet i Leyden. (5/1273.)

Ordbogskommissionen:

N. L. Westergaard. *Sv. Grundtvig.*

Kommissionen for Udgivelsen af et Dansk Diploma-
tarium og Danske Regester:

P. G. Thorsen. *F. E. A. Schiern.* *H. F. Rördam.*

Kassekommissionen:

N. L. Westergaard. *C. L. Müller.* *J. J. A. Worsaae.*

Revisorer:

L. A. Colding. *H. P. J. J. Thomsen.*

1876.

1. Mødet den 14^{de} Januar.

(Tilstede vare 19 Medlemmer: Madvig, Præsident, Ussing, Reinhardt, Holten, Steen, Johnstrup, Lorenz, Grundtvig, Lütken, Zeuthen, Schjellerup, Schmidt, Oppermann, Christiansen, Sekretæren, Westergaard, Thomsen, Panum, Schiern.)

Professor C. Holten meddelte de almindelige Resultater, som Hr. P. La Cour havde uddraget af Tyge Brahes Vejr-
lagttagelser fra 1582—97, og som ville komme til at ledsage Skriftet med de originale lagttagelser.

Derefter valgtes følgende 8 Videnskabsmænd til uden-
landske Medlemmer af Selskabets matematisk-natur-
videnskabelige Klasse:

Mathematikeren Charles Hermite, korresponderende Medlem
af det franske Institut,

Mathematikeren George Salmon, D. D., Regius Professor
of Divinity ved Universitetet i Dublin,

Mathematikeren Luigi Cremona, Direktør for Ingeniørskolen
i Rom,

Fysikeren Professor Dr. Gustav Kirchhoff i Berlin,

Fysikeren Professor Dr. Hermann Helmholtz i Berlin,

Naturforskeren Thomas H. Huxley, Professor ved den Kgl.
Bjergværksskole i London,

Naturforskeren Professor Dr. Carl Th. E. von Siebold i
München, og

Fysiologen Professor Dr. Carl Ludwig i Leipzig.

Fra Professor Carl R. Unger i Kristiania var der kommet en Takskrivelse i Anledning af hans Optagelse i Selskabet.

Efter Anmodning af Adjunkt Karl Schmidt i Odense havde Sekretæren anvist til Udbetaling den ham tilstaaede Understøttelse til Anskaffelse af et spektral-analytisk Apparat.

Selskabet tillod Prof. Hannover at benytte Kobberpladerne til Afhandlingen om Øjets Nethinde til en fransk Oversættelse af dette Værk.

Adjunkt C. Grønlund, der tidligere har rejst i Island paa egen Bekostning for at undersøge Øens Flora, og som har offentliggjort to Skrifter, der kunne betragtes som Forløbere for en fuldstændig Oversigt over denne, ansøger Selskabet om en Understøttelse af 500 Kroner til Afslutningen af en videnskabelig Undersøgelse og Bearbejdelse af Islands Flora. Selskabet besluttede fra Professorerne Steenstrup, Johnstrup og Lange at modtage en Udtalelse om dette Andragende.

Redaktøren fremlagde af Skrifternes 5te Rækkes matematisk-naturvidenskabelige Afdeling: B. XI, H. 2 Øjets Nethinde af A. Hannover og B. XII, H. 2 Velhas-Flodens Fiske af Chr. Fr. Lütken.

De paa Boglisten under Nr. 1—19 anførte Skrifter vare fremlagte i Mødet.

2. Mødet den 28^{de} Januar.

(Tilstede vare 15 Medlemmer: Bendz, Mødets Præsident, Westergaard, Panum, Thomsen, Lange, Lorenz, Lütken, Schjellerup, Jørgensen, Schmidt, Oppermann, Christiansen, Ussing, fungerende Sekretær, Johnstrup, Colding.)

I Præsidentens Forfald førte Etatsraad Bendz Præsidentiet, medens Redaktøren, i Henhold til Vedtægterne,

fungerede for Sekretæren, der ligeledes havde meldt Forfald.

Docent C. Christiansen holdt et Foredrag over Magnetisering af blødt Jern, som vil blive optaget i Selskabets Skrifter.

Betænkning over Adjunkt Grønlunds Andragende om Understøttelse til Bearbejdelse af Islands Flora, var afgivet af den i dette Øjemed nedsatte Komité (Steenstrup, Johnstrup, Lange), der anbefalede at tilstaa en Sum af mindst 500 Kroner. Sagen henvistes til Kassekommissionens Erklæring.

Da der før Mødet havde været afholdt Møde af den matematisk-naturvidenskabelige Klasse, var der ikke sat flere Forretningssager paa Dagsordenen for dette Møde.

Fremlagte vare de paa Boglisten under Nr. 20—47 anførte Skrifter.

3. Mödet den 11^{te} Februar.

(Tilstede vare 14 Medlemmer: Madvig Præsident, Ussing, Reinhardt, Colding, Thomsen, Johnstrup, Holm, Zeuthen, Jørgensen, Schmidt, Sekretæren, Westergaard, Lange, Lütken.)

Prof. Stadsingeniør A. Colding meddelte Resultaterne af nogle Undersøgelser over de ved Vindens Kraft fremkaldte Strømninger i Havet. Denne Afhandling vil blive optagen i Skrifterne, medens et Uddrag er bestemt for Oversigterne.

Kassekommissionen afgav sin Erklæring om Adjunkt Grønlunds Andragende om Understøttelse til hans Islands Flora, hvorefter Selskabet bevilgede 500 Kroner til Hr. Grønlund.

Efterat have besluttet, at der, i Henhold til den historisk-filosofiske Klasses Forslag, for dette Aar kun skulde ud-

sættes én Prisopgave for denne Klasse, samt at der iaar skulde udsættes en Prisopgave for det Schouske Legat, vedtog Selskabet følgende

Prisopgaver for 1876.

Den historisk-filosofiske Klasse.

Filologisk Prisopgave.

(Pris: Selskabets Guldmedaille.)

Til det Karakteristiske og Ejendommelige ved den senere Oltids, saavel den græskes som den romerskes Aandsliv hører den bestemte Opstilling og Anerkjendelse af en ældre afsluttet Litteratur med dens Sprogform som den klassiske og for alle Tider som Mønster og Norm gyldige, og en bestandig Tæren paa denne Skat, der dog efter Forholdenes Natur og Værkernes Opbevaring i Afskrifter efterhaanden stadig indskrænkedes, forsaavidt den ikke bevaredes ved en Skoletradition. Selskabet ønsker at fremkalde en klarere Oversigt over og Indblik i denne hele, ogsaa for vor Besiddelse af Oltidslitteraturen, afgjørende Tradition og dens Virkninger for den latinske Sides Vedkommende ved at udsætte for Aaret 1876 følgende Prisopgave:

Hvorledes vurderedes og benyttedes Romernes klassiske Skribenter af Kejsertidens Grammatikere og i deres Skoler? Hvilken Indflydelse havde denne Vurdering og Benyttelse paa Litteraturens Opbevarelse og Forsvinden? og hvormeget af den gamle Litteratur skjønnes at have været i Omløb og tilgængeligt omtrent 500 Aar efter Christus?

Den matematisk-naturvidenskabelige Klasse.

Astronomisk Prisopgave.

(Pris: Selskabets Guldmedaille.)

Det er i mange Henseender af Vigtighed i Astronomien at have Kjendskab til det Grundlag, hvorpaa ældre Undersøgelser ere støttede. Selskabet ønsker derfor, da Saadant ikke findes

planmæssigt samlet, men meget besværligt i hvert givet Tilfælde maa udsøges af Hovedværkerne eller af derhen hørende Specialafhandlinger, at fremkalde en ordnet Oversigt over alle i den sfæriske og den theoretiske Astronomi forekommende Konstanter, saaledes som de ere blevne udledte i Tidernes Løb. Af Hensyn til Stoffets Omfang indskrænkes dog det Tidsrum, der ønskes behandlet, saaledes, at det begynder med Ptolemæus og ender med Udgangen af det 18de Aarhundrede. Der kræves vel ingen kritisk Vurdering af de forskjellige Konstanter Paalidelighed, hvorimod Fuldstændighed og Overskuelighed ifølge Sagens Natur bør tilstræbes. Endvidere udelukkes de særlige Undersøgelser over Fixstjernernes Egenbevægelser og Parallaxer, de ydre Planeters Maaner samt Kometbanernes Elementer.

Fysisk Prisopgave.

(Pris: Selskabets Guldmedaille.)

Vort Kjendskab til Lysbrydningens Afhængighed af Legemernes Tilstandsform lader endnu meget tilbage at ønske, hvortil Grunden for en væsentlig Del ligger i Mangel paa tilstrækkeligt Materiale for Dampenes Vedkommende.

Selskabet ønsker derfor at fremkalde en Undersøgelse af nogle flygtige Stoffers Lysbrydning og Farvespredning i dampformig Tilstand.

For det Thottske Legat.

(Pris: 400 Kroner.)

Medens mange kemiske Processer foregaa saa hurtigt, at de næsten kunne betragtes som momentane, er der andre, som fordre en meget kjendelig Tid, uagtet de reagerende Stoffer befinde sig under Forhold, som maatte anses for særlig gunstige for Reaktionens hurtige Forløb. Til den sidste Klasse af Processer henhøre f. Ex. Reaktionen af Klor eller Brom paa Fosforundersyring og Fosforsyring i vandige Opløsninger, hvor Reak-

tionens langsomme Fremadskriden let kan iagttages ved Thermometret.

Selskabet ønsker at fremkalde en Række Undersøgelser, der enten kunde tjene til Belysning af Aarsagen til denne Forskjelighed i Reaktionernes Hurtighed, eller som kunne give Oplysning om Loven, efter hvilken Reaktionen skrider frem i nogle velundersøgte Tilfælde.

For en fyldestgjørende Besvarelse af denne Opgave udsætter Selskabet en Pris af 400 Kroner.

For det Classenske Legat.

I. (Pris: indtil 400 Kroner.)

Da det ved nyere Undersøgelser synes at være blevet tvivlsomt, hvorvidt Natriumforbindelser, der saa almindeligt forekomme i Jordbunden og i Planteaskerne, ogsaa virkelig ere nødvendige for Planternes normale Udvikling, saaledes som det maa anses for vist, at Kalium-, Kalcium-, Magnium- og Jernforbindelser ere det, saa udsætter Selskabet en Pris af indtil 400 Kroner for et Arbejde, der besvarer hint Spørgsmaal for nogle her i Landet vildtvoksende og dyrkede Planters Vedkommende.

II. (Pris: indtil 800 Kroner.)

[Indleveringstiden for Besvarelser af denne Opgave er Udgangen af Oktober 1878.]

Da det har vist sig, at dansk Byg, og navnlig saadant, som har et fast, glasagtigt (flintet) Brud i Stedet for et melet, ofte mangler de Egenskaber, som fordres ved godt Maltbyg, og det, saavel af Hensyn til dets Anvendelse i vore Maltgjørier, som til dets Afsætning til England o. a. St., maa anses for vigtigt at raade Bod derpaa, — udsætter Selskabet en Præmie af indtil 800 Kroner for en Afhandling, som, foruden at oplyse den særegne Beskaffenhed af saadant Byg, paaviser de Omstændigheder, som under dets Væxt, Dyrkning og Behandling giver Anledning til den nævnte Fejl.

For det Schouske Legat.

(Pris: indtil 1000 Kroner.)

[Indleveringstiden for Besvarelser af denne Opgave er 31te Marts 1879.]

Det er vel bekjendt, at Skove ere aldeles forsvundne fra store Partier af Danmark, og at selv hvor de endnu findes, indtage de dog i Reglen et mindre Areal end i tidligere Tid. Der kan nu ikke være nogen Tvivl om, at de Vandstands-Forandringer, der ere foregaaede ved mange af vore Søer og Vandløb, staa i et Afhængighedsforhold dertil; men man savner omfattende og paalidelige Undersøgelser angaaende disse to Spørgsmaal, der sikkert ville kunne belyses ved Hjælp af Kort, Matrikeiprotokoller og ældre Arkivdokumenter.

Selskabet udsætter derfor en Pris af indtil 1000 Kroner for en paa autentiske Data støttet Fremstilling af Skovenes Udstrækning — saavidt muligt ogsaa deres Beskaffenhed — og Vandragenens Omfang her i Danmark til forskjellige Tidspunkter i Løbet af de sidste Aarhundreder, ledsaget af Kort, der vise Tilstanden i disse Tider. Da det ikke er rimeligt, at en Enkelt vil kunne løse Opgaven fyldestgjørende for hele Landets Vedkommende, vil den udsatte Pris ogsaa kunne gives for en Besvarelse, hvori der kun er behandlet en mindre Del af Danmark, f. Ex. en af de større Øer eller et Parti af Jylland.

Besvarelserne af Spørgsmaalene kunne i Almindelighed være affattede i det latinske, franske, engelske, tyske, svenske eller danske Sprog. Afhandlingerne betegnes ikke med Forfatterens Navn, men med et Motto, og ledsages af en forseglet Seddel, der indeholder Forfatterens Navn, Stand og Bopæl, og som bærer samme Motto. Selskabets i den danske Stat boende Medlemmer deltage ikke i Prisæskningen. Belønningen for den fyldestgjørende Besvarelse af et af de fremsatte Spørgsmaal, for hvilket ingen anden Pris er nævnt, er Selskabets Guldmedaille, af 320 danske Kroners Værdi.

Prisskrifterne indsendes inden Udgangen af Oktober Maaned 1877 til Selskabets Sekretær, Etatsraad Professor Dr. **J. Japetus Sm. Steenstrup**, med Undtagelse af Besvarelserne af de to sidste Prisspørgsmaal; for det første af disse udløber Fristen den 31te Oktober 1878, for det andet den 31te Marts 1879.

Sekretæren meddelte, at der var indkommet Takskrivelser fra følgende nyoptagne udenlandske Medlemmer: Proff. Salmon i Dublin, Huxley i London, Ludwig i Leipzig, og Kirchhoff i Berlin.

Sekretæren anmeldte, at Selskabet den 8de Januar d. A. havde mistet dets ældste udenlandske (oprindeligt indenlandske) Medlem i den historisk-filosofiske Klasse, Professor A. D. Twesten i Berlin; han døde i en Alder af 87 Aar og havde været Medlem siden den 21de December 1821.

La Société Linnéenne de Normandie i Caen opfordrer Selskabet til at bidrage til Tilvejebringelsen af et værdigt Minde om den berømte Élie de Beaumont, der i lang Tid var udenlandsk Medlem af vort Selskab.

Fremlagte vare de paa Boglisten under Nr. 48—73 anførte Skrifter.

4. Mødet den 25^{de} Februar.

(Tilstede vare 18 Medlemmer: Madvig, Præsident, Ussing, Reinhardt, Colding, Steen, Mehren, Schjellerup, Jørgensen, Schmidt, Christiansen, Sekretæren, Thorsen, Oppermann, Holm, Thomsen, Lütken, Schiern, Westergaard.)

Professor Dr. A. F. van Mehren forelagde et fra Selskabets udenlandske Medlem Michele Amari sendt Arbejde:

Le Epigrafi Arabiche di Sicilia og forbandt hermed et Foredrag over Arabernes Indflydelse paa Siciliens Kulturforhold indtil Udgangen af det 12te Aarhundrede. Dette Foredrag vil blive optaget i Oversigterne.

Paa Mødesedlen vare Medlemmerne blevne mindede om den i Vedtægternes § 5 fastsatte Frist for Indgivelse af Forslag til nye Medlemmers Optagelse, den 15de Marts.

Fra de nyoptagne udenlandske Medlemmer Prof. Luigi Cremona i Rom og Prof. Ch. Hermite i Paris var der indkommet Takskrivelser. Den Førstnævnte havde tillige sendt sit fotografiske Portræt, den Sidstnævnte foruden 17 Afhandlinger tillige sin *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*.

Dr. Camillo Tychsen, Bestyrer af Livrente-Anstalten, havde indsendt en matematisk Afhandling, «En Note til en Spilleropgave i Laplace's *Théorie analytique des Probabilités*», med Ønske om dens Optagelse i Selskabets Oversigter. Til at ytre sig herom valgtes en Komité bestaaende af Prof. Dr. Steen, Docent Lorenz og Prof. Schjellerup.

Baron F. de Barghon Fort-Rion, der for kort Tid siden sendte Selskabet nogle mindre Skrifter (Boglisten Nr. 33—34), meddeler, at han ret snart vil sende: *La Chronique de Canut IV le Saint, Roi de Danemark etc.*

Kapitain F. Buchwald af Generalstaben indsender en Afhandling om en ny Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices, med Ønske om, at den maa blive optagen i en af Selskabets Publikationer. Til at erklære sig herover valgtes en Komité bestaaende af Prof. Dr. Steen, Docent Lorenz og Docent Dr. Zeuthen.

I Mødet fandtes fremlagte de indsendte Skrifter, der ere anførte paa Boglisten under Nr. 73—96.

5. Mødet den 10^{de} Marts.

(Tilstede vare 17 Medlemmer: Madvig Præsident, Worsaae, Reinhardt, Steen, Thorsen, Johnstrup, Barfoed, Lorenz, Holm, Lütken, Jørgensen, Schmidt, Christiansen, Sekretæren, Panum, Westergaard, Schiern.)

Lektor Dr. S. M. Jørgensen forelagde og omtalte kortelig det af ham bearbejdede nylig sluttede tredje Bind af Gmelin-Kraut's «Handbuch der Chemie, 6te umgearbejtede Auflage». Dette Foredrag vil ikke blive meddelt i Oversigterne.

Derefter forelagdes et af Selskabets Medlem, Prof. Dr. Lund i Aarhus, indsendt lexikalsk Arbejde «Det ældste danske Skriftsprogs Ordforraad eller Ordbog til Skaanske, Jyske og de to Sællandske Love», til hvis Udgivelse han ønskede Selskabets Understøttelse. Et Brev, hvori Forfatteren gjør Rede for Planens Udførelse, oplæstes, og derpaa valgtes, efter Forfatterens Ønske, til Arbejdets Prøvelse en Komité bestaaende af Proff. Gislason, Thorsen og Grundtvig.

Efter Anmodning fra det kejserslige Observatorium i Wilhelmshaven besluttede Selskabet at sende dette sine Oversigter, alle Særtryk af de matematiske, meteorologiske, astronomiske og fysiske Skrifter, samt de særligt udgivne astronomiske Skrifter.

Fra *La Société Néerlandaise pour le Progrès de l'Industrie, fondée à Harlem* var der indkommet en Indbydelse til at medvirke til Stiftelsen af et *Musée d'Art appliqué à l'Industrie*.

Fra *Congrès International des Orientalistes* var der tilstillet Selskabet en Opfordring til Deltagelse i dens tredje Sammenkomst i St.-Petersborg i September 1876.

Sekretæren meddelte nogle Oplysninger om Forretningsgangen i Selskabets Sekretariat og Arkiv.

I Henhold til den af den dertil nedsatte Komité (Steen, Lorenz, Schjellerup) Betænkning, besluttede Selskabet at

optage Dr. Tychsens Afhandling om Laplace's Spilleropgave i Oversigterne. Den afgivne Betænkning lyder saaledes:

«Selskabet har forlangt en Udtalelse af os om «En Note til en Spilleropgave i Laplace's *Théorie analytique des Probabilités. Paris 1814*», som Dr. Tychsen har ønsket optagen i Oversigterne. Vi have deri fundet en Løsning af den berømte Opgave ved Hjælp af Lagranges Methode til Integration af Differensligninger, som i Simpelhed meget maa foretrækkes for Laplaces ved genererende Funktioner; vi antage derfor, at der knytter sig saa megen videnskabelig Interesse til denne Note, at den egner sig til Optagelse i Selskabets Oversigter.

D. 10de Marts 1876.

Adolph Steen, L. Lorenz. Schjellerup.
Affatter.

De i Mødet fremlagte Skrifter ere optagne paa Boglisten under Nr. 97—126.

6. Mødet den 24^{de} Marts.

(Tilstede vare 20 Medlemmer: Madvig Præsident, Westergaard, Ussing, Gislason, Colding, Panum, Thomsen, Steen, Thorsen, Johnstrup, Lange, Mehren, Holm, Lütken, Schjellerup, Jørgensen, Schmidt, Oppermann, Christiansen, Sekretæren.)

Professor Jul. Thomsen meddelte Resultaterne af sine Undersøgelser over Guldets Haloïdforbindelser. Denne Meddelelse er ikke bestemt til at optages i Selskabets Skrifter.

Kassekommissionen forelagde Regnskabsoversigten for 1875, der i trykte Exemplarer var bleven omsendt til Medlemmerne tillige med Tilsigelses-Sedlen:

Oversigt over Regnskabet for Aaret 1875.

	Kr.	Ø.	Kr.	Ø.
Indtægt.				
I. aarlige Indtægter:				
1. Renter af Selskabets Fonds i 1875.				
a) 110,000 Rdl. indskrevne i Statskassen	8800	"		
6,000 — Husejer-Kreditkasse-Obligationer	480	"		
3,200 — Rigsbank-Obligationer	256	"		
3,000 — Østifternes Kreditforenings-Obligationer	240	"		
22,000 — Københavns Laans Obligationer	1760	"		
144,200 Rdl. med 4 pCt. Rente.			11536	"
b) Udbytte af 300 Rdl. i Nationalbank-Aktier			54	"
c) 1/2 Aars Rente af en udtrukken dansk-engelsk Obligation 100 £ 5 pCt.	45	56		
4 pCt af 80 £ i Sjællandske Jernbane-Aktier	58	25		
Udbytte af samme for 1874	36	54		
			140	35
2. Fra det Classenske Fideicommis	400	"		
Etatsraad Schous og Hustrus Legat	100	"		
Fra den grevel. Hjelmstjerne-Rosenkroneske Stiftelse	1249	71		
			1749	71
3. For Salget af Selskabets Skrifter og Ordbogen i 1874			371	89
4. Renter af Folio i Privatbanken ^{2/1874} og ^{1/1875}			49	64
1. Aarlige Indtægter			13901	59
2. Udtrukken dansk-engelsk Obligation 100 £			1822	91
3. To Guldmedaillers Værdi			640	"
4. Kassebeholdning fra 1874:				
rede Penge	3457	25		
Hjelmstjerneske-Rosenkroneske Bidrags	1868	18		
en Guldmedaille	320	"		
			5645	43
Samlet Indtægt			22009	93

	Kr.	Ø.	Kr.	Ø.
Udgift.				
A. Til Selskabets Bestyrelse og dets Virksomhed:				
I. Embedsmændenes og Budets Lønning samt Med-				
hjælp ved Sekretariatet 2690 .				
Løbende Udgifter til Brænde, Lys, Porto m. v.				
samt Gratifikationer (260 Kr.) 1451 65				
			4141	65
II. a) Selskabets Skrifter:				
1) Trykning af Skrifterne	2617	Kr. » Ø.		
2) Papir til Skrifterne	871	— 8 -		
3) Trykning af Oversigten med Papir	529	— 59 -		
4) Oversættelse af fransk Resumé	157	— » -		
5) Kobbere, Træsnit o.l.	2342	— » -		
6) Bogbinderarbejde	974	— 50 -		
	7491	17		
b) Præmier:				
1) Dr. Schubert (i Hildesheim), Guld-	320	Kr. » Ø.		
medaille (d. 29 Jan. 1875)				
2) Cand. P. Tauber (d. 29 Jan. 1875)	400	— » -		
3) P. la Cour (Underbestyrer ved				
met. Inst.), Guldmedaille (26 Febr.	320	— » -		
1875)				
4) L. V. Scheel (Ass. i Generaldir.	400	— » -		
f. Skattevæsenet), (d. 5 Nov. 1875)				
	1440	»		
c) Ordbogen 50 »				
Den meteorologiske Komite til Afslutning 314 »				
Regestum diplomaticum 983 »				
			10278	17
B. Understøttelser til videnskabelige Foretagender:				
<i>Af det Hjelmstjerne-Rosenkroneske Bidrag:</i>				
1) Katalog over den danske Litteratur	293	5		
2) Til Udgravningen ved Sølager (d. 19 Novbr. 1875)	150	»		
3) Adjunkt K. Schmidt til et spektralanalytisk Ap-	200	»		
parat (d. 19 Novbr. 1875)			643	5
			15062	87
Aarets Udgifter				
C. Indkjøb af to Guldmedailler 659 31				
D. Beholdning ved Aarets Udløb:				
1) rede Penge	3492	91		
2) Hjelmstjerneske-Rosenkroneske Bidrags	2474	84		
3) en Guldmedaille	320	»		
			6287	75
			22009	93

Det Hjelmsjerne-Rosenkroneske Bidrag:

	Kr. Ø.	Kr. Ø.
I. Rest fra 1874 (934 Rd. 9β)	1868. 18	
Bidrag for 1875	1249. 71	
	3117. 89	
II. Katalog over den danske Literatur	293. 5	
Udgravning ved Sølager	150. "	
Spektralanalytisk Apparat	200. "	
	643. 5	
Rest.		2474. 84.

om hvis Anvendelse jfr. Budget for 1876.

Formanden for den historisk-filosofiske Klasse meddelte, at Klassen havde vedtaget i næste Møde at foreslaa Optagelsen af 3 i dette Møde navngivne indenlandske og 3 navngivne udenlandske Medlemmer.

Formanden for den matematisk-naturvidenskabelige Klasse meddelte, at Klassen havde vedtaget i næste Møde at foreslaa Optagelsen af 1 navngivet indenlandsk og 1 navngivet udenlandsk Medlem.

I Mødet vare fremlagte de paa Boglisten under Nr. 127 til 150 anførte Skrifter.



7. Mødet den 7^{de} April.

(Tilstede vare 22 Medlemmer: Madvig, Præsident, Bendz, Westergaard, Ussing, Hannover, Gislason, Reinhardt, Müller, Panum, Schiern, Thomsen, Thorsen, Johnstrup, Mehren, Holm, Grundtvig, Lütken, Schjellerup, Jørgensen, Schmidt, Oppermann, Sekretæren).

Etatsr. Professor Japetus Steenstrup meddelte nogle Bemærkninger om de i Schweiz i forrige Aar fundne Spor af Menneskets Tilværelse i en Tid, der gik forud for Istiden (nemlig i interglaciære Kullag). Dette Foredrag er optaget i «Archiv für Anthropologie etc.» 1876.

Den historisk- filosofiske Klasse forelagde sine tidligere anmeldte Forslag til Optagelse af følgende 3 indenlandske Medlemmer:

Viggo Fausbøll, Assistent ved Universitetsbibliotheket;
Dr. phil. Caspar W. Smith, Docent i slaviske Sprog og
Jón Thorkelsson, Rektor for Reykjavik lærde Skole,
hvilke ved den paafølgende Afstemning alle bleve valgte til Medlemmer.

Samme Klasse forelagde ligeledes sine tidligere anmeldte Forslag om Valg af 3 udenlandske Medlemmer, nemlig:

Léopold- Victor Delisle, Direktør for Nationalbibliotheket i Paris og Medlem af *L'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, i Paris
Émile Littré, Medlem af *L'Académie Française* og *L'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, i Paris, og
Franz Palacky, bøhmisk Historiograf, i Prag,
hvilke alle ved den paafølgende Afstemning bleve optagne som Medlemmer.

Den matematisk-naturvidenskabelige Klasse forelagde dernæst sit tidligere anmeldte Forslag til et nyt indenlandsk Medlem

Dr. med. Harald Krabbe, Assistent i Anatomi ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, der ved Afstemningen optoges som Medlem.

Samme Klasse forelagde ligeledes sit i det foregaaende Møde anmeldte Forslag til Optagelse af et nyt udenlandsk Medlem:

O. W. Struve, Gehejmerraad, Direktør for Observatoriet i Pulkowa, som ved den paafølgende Afstemning valgtes til Medlem.

Der. Verein für Bremische Geschichte und Alterthümer havde udtalt et Ønske om at udvexle Skrifter med Selskabet. I Henhold til en Anbefaling fra Proff. Thorsen og Holm foreslog Sekretæren at sende Foreningen Selskabets historiske Afhandlinger, den 4de og 5te Række, Storms «Snørre Sturlesøn», Regesta Diplomatica samt Oversigterne fra 1857, hvilket Forslag Selskabet billigede.

Til *La Società Toscana di Scienze Naturali i Pisa*, der ogsaa ønskede at tilvejebringe en Skriftudvexling med Selskabet, besluttede dette efter Sekretærens Forslag at sende Oversigterne fra 1873 samt enkelte zoologiske Afhandlinger.

Kais.- Kön. Zoologisch-Botanische Gesellschaft i Wien havde meddelt, at det den 8de April d. A. vilde fejre sin 25de Aarsdag.

Af Selskabets Medlem, Prof. Paludan-Müller var der stillet en skriftlig Forespørgsel angaaende Forstaaelsen af Vedtægternes § 1, hvilket Sekretæren meddelte til foreløbig Efterretning.

I Mødet fandtes fremlagte de som Nr. 151—171 paa Boglisten anførte Skrifter.

8. Mødet den 28^{de} April*).

(Tilstede vare 18 Medlemmer: Madvig, Præsident, Ussing, Gislason, Reinhardt, Schiern, Steen, Lorenz, Holm, Rørdam, Schjellerup, Smith, Fausbøll, Krabbe, Sekretæren, Westergaard, Oppermann, Thorsen, Lütken).

Prof. Dr. F. Schiern meddelte i Tilslutning til sin tidligere meddelte Oplysning om Oldtidens Kjendskab til Nilens Kildesøer nogle yderligere Bemærkninger herom efter de sidste Opdagelsesrejsers Udbytte. Denne Meddelelse er ikke bestemt for Selskabets Skrifter.

Ved det derefter i Overensstemmelse med Vedtægternes § 9 foretagne Valg paa en Sekretær gjenvalgtes Etatsraad Prof. Japetus Steenstrup.

I Henhold til samme § foretoges dernæst Valg paa en Kasserer. Prof. Reinhardt blev gjenvalgt.

Ifølge Vedtægternes § 15 foretoges Valg paa et Medlem af Kassekommissionen i Stedet for Etatsraad Müller, der fratraadte efter Tour og havde frabedt sig Gjenvalg. Selskabet valgte Prof. E. Holm. Det besluttede derhos at takke Etatsraad Müller for hans lange Virksomhed i Kommissionen.

Den Komité, (Gislason, Thorsen, Grundtvig), som var valgt i Anledning af Professor Rektor Lunds lexikalske Arbejde: «Det ældste danske Skriftsprogs Ordforraad eller Ordbog til Skaanske, Jyske og de to Sællandske Love» [s. ovf. S. (21)], afgav sin Betænkning, der efter nogle Henstillinger til Forfatterens Opmærksomhed sluttede saaledes: «En Ordbog over vort Skriftsprogs ældre Ordforraad savnes virkelig meget. Den vil kunne blive meget nyttig og af stor Betydning, og man maa derfor være Professor Lund Tak skyldig, fordi han har paataget sig dette Arbejde. Vi tillade os at

*) Da der kun stod ét ordinært Møde tilbage i dette Foraar, blev den sidste Fredag i Maaneden valgt til dette Møde, for at der kunde tilvejebringes en Afslutning af enkelte Forretningssager inden Feriens Begyndelse.

foreslaa, at Selskabet tilstaar ham dertil en Understøttelse af 400—500 Kroner». I Henhold hertil, samt til Kassekommissionens Erklæring vedtog Selskabet at understøtte Udgivelsen af Prof. Lunds Arbejde med en Sum af 500 Kroner.

Professor Dr. C. Paludan-Müller, der — som i forrige Møde meddelt — havde ønsket en autentisk Udtalelse fra Selskabet om Forstaaelsen af §§ 1 og 5 i Vedtægterne, havde nu indsendt et yderligere Indlæg til Oplysning af hans Opfattelse af disse Paragrafer og af de Kvalifikationer, der maatte forudsættes hos de til en Klasse eller til Selskabet foreslaaede indenlandske Medlemmer. Selskabet vedtog at tilstille Professoren følgende Svar: «Ligesom Selskabets Formaal i dets Vedtægter er betegnet ved Angivelsen af visse Klasser af Videnskaber, saaledes maa de videnskabelige Kvalifikationer, der give Adgang til Selskabet, søges i Retningen af disse Videnskaber, uden Hensyn til Videnskabsmandens øvrige Studier eller hans Samfundsstilling».

Det Sæt meteorologiske Instrumenter, som Selskabet havde besluttet at skjænke den nye botaniske Have, var nu blevet istandsat og afleveret til denne, der havde taget det i Brug. Havens Direktør, Prof. Lange havde skriftligt udtalt dens Tak til Selskabet. I Henhold til den i Mødet den 15de Januar 1875 vedtagne 3die Tillægspost til Budgettet for 1875 tillod Selskabet, at den til Istandsættelsen medgaaede Sum blev anvist til Udbetaling.

Etatsraad Dr. Bendz havde vist Selskabet den Opmærksomhed at tilsende det Slutningshæftet af hans «Haandbog i den fysiologiske Anatomi af de almindeligste danske Huspattedyr», indeholdende Nervesystemets Anatomi og Fysiologi.

Nationalbibliotheket i Athen meddeler ved Bibliothekaren, Hr. Hofpræst Gasran, at Selskabet vil faa tilstillet et fotografisk Aftryk af en Papyrus-Original, der forefindes i Bibliotheket.

Fremlagte i Mødet vare de paa Boglisten som Nr. 172—208 opførte Skrifter.

Overordentligt Møde den 29^{de} September 1876 i Anledning af „Carlsbergfondet“.

(Tilstede vare 28 Medlemmer: Madvig, Præsident, Bendz, Westergaard, Ussing, Worsaae, Hannover, Reinhardt, Colding, Panum, Holten, Thomsen, Steen, Johnstrup, Barfoed, Lange, Lorenz, Holm, Lütken, Zeuthen, Schjellerup, Jørgensen, Schmidt, Oppermann, Christiansen, Fausbøll, Smith, Krabbe, Sekretæren).

Til dette overordentlige Møde vare Medlemmerne sammenkaldte ved følgende Rundskrivelse:

Til samtlige Medlemmer af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab.

(Konfidentielt).

Idet vi hermed omsende til de Herrer Medlemmer af det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab vedlagte Skrivelse (med Bilag) fra Kapitain, Brygger **Jacobsen** paa Carlsberg, hvori han opfordrer Selskabet til nu og for Fremtiden ved Valg af dets Midte at danne Bestyrelsen for en til videnskabelige Ojemeds Fremme bestemt Stiftelse, som han med usædvanlig og højsindet Rundhaandethed har oprettet og udstyret, maa vi allerførst bede vore Herrer Kollegaer at betragte denne Meddelelse som i streng Forstand konfidentiel, saa at den, indtil Beslutning desangaaende er tagen, kun gjøres til Gjenstand for mulige indbyrdes Samtaler mellem Medlemmerne. Dernæst anmode vi de Herrer om, i denne Anledning at samles til et ekstraordinært Møde i Selskabets Lokale **Fredagen den 29de dennes Kl. 6¹/₂**, for at tage Sagen under Overvejelse og, saafremt en yderligere Forhandling ikke findes nødvendig, derom at tage Beslutning.

Kjøbenhavn d. 25de September 1876.

J. N. Madvig,
Videnskabernes Selskabs
Præsident.

Japetus Steenstrup,
Videnskabernes Selskabs
Sekretær.

Forud for de to Bilag, der fulgte med denne Rundskrivelse til Medlemmerne, meddeles her den Skrivelse, som Hr. Kapitan Brygger **Jacobsen** samme Dag havde tilstillet Selskabets Præsident i Forening med Bilagene.

Til Præsidenten for det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab,

Hr. Conferentsraad Madvig.

Hoslagt har jeg den Ære at tilstille Deres Høivelbaarenhed et ærbødigt Andragende til Videnskabernes Selskab om at tage en af mig idag oprettet Stiftelse til videnskabelige Formaaals Fremme under sin Varetaget. Som Bilag vedlægger jeg det for Stiftelsen udfærdigede Fundats- og Gavebrev tilligemed Udkastet til dens Statuter.

I levende Erkjendelse af, hvormeget jeg skylder H. C. Ørsteds Lære og vækkende Indflydelse, og som et Vidnesbyrd om taknemlig Paaskjønnelse af hans Virksomhed for at udbrede Kundskabens Lys i videre Kredse, har jeg knyttet Oprettelsen af ovennævnte Stiftelse til denne Dag, som ved Afsløringen af Ørsteds Monument er viet til hans Ihukommelse. Det vil ogsaa være mig kjært, dersom mit Andragende til Videnskabernes Selskab kan blive tilstillet dets Medlemmer endnu idag.

Modtag Hr. Præsident Forsikkringen om den udmærkede Høiagtelse, hvormed jeg tegner mig

Carlsberg d. 25de September 1876.

Deres ærbødige

J. C. Jacobsen,
Brygger.

Til

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab.

Efterhaanden som der ved Naturforskernes Bestræbelser bringes de Industridrivende flere Kundskaber og en bedre Indsigt i Naturlovene, voxer Erkjendelsen af disse Kundskabers Uundværlighed og dermed Trangen til at udvide dem, navnlig i de specielle Retninger, som have særlig Betydning for den enkelte Industrigreen.

Da det imidlertid ikke kan fordres eller ventes af de ved de offentlige Lærestalter ansatte Videnskabsmænd, at de i videre Omfang kunne eller skulle fordybe sig i Undersøgelser af de mangfoldige Enkeltheder, hvorom de forskjellige Industriegrene, hver for sit Vedkommende, ønske Oplysning, har man i den senere Tid i flere Lande begyndt at oprette særegne Laboratorier eller saakaldte Forsøgsstationer, beregnede paa at forskaffe den vedkommende Industri fyldigere Kundskaber og en dyberegaaende Indsigt.

Disse Instituter have ganske vist, ogsaa for Bryggeriets Vedkommende, gjort ikke liden Nytte, men de lade dog i Regelen meget tilbage at ønske. De lide nemlig næsten alle af den Mangel, at deres Tilværelse er usikker og kun kan betragtes som noget Forbigaaende, hvilket medfører hyppig Vexlen af de derved beskjæftigede Videnskabsmænd, hvorved disses forberedende Studier og Arbejder gaae tabte, før de have kunnet bære Frugt. Som oftest er slige Instituters Opgave desuden stillet altfor begrændset, saa at de ikke give Leilighed til yderligere at udvikle, ja, neppe til at bevare den almindelige, videnskabelige Dygtighed, som udfordres til deres Ledelse, og, omvendt, omfatter Opgaven undertiden for meget Andet, f. Ex. en meget elementair Underviisning — som i de saakaldte «Brauschulen» — der ikke lader Tid og Ro tilovers til sand videnskabelig Forskning, ei at tale om et hyppigt Paahæng af reent industriel Virk-

somhed med Analyser efter Bestilling, Attesters Udstedelse o. desl.

Ledet af foranførte Betragtninger har jeg i Forbindelse med mit Bryggeri Carlsberg oprettet et Laboratorium, bestemt til chemiske og physiologiske Undersøgelser og Studier i de Retninger af Naturvidenskaberne, som have særlig Betydning for Maltnings-, Brygnings- og Gjørings-Processerne, med det Formaal ikke alene at give Bryggeri-Techniken det daglige Brød, men tillige at give de der beskæftigede Videnskabsdyrkere Anledning og Midler til at uddanne sig og virke som Specialister i de Retninger, hvortil Bryggeri-Operationerne og de Phænomener, som disse frembyde, give særlig Leilighed og Opfordring.

Til at forestaae Arbejderne i dette Laboratorium har jeg engageret Chemikeren Hr. Cand. polyt. Kjeldahl og Physiologen Hr. Cand. med. R. Pedersen. Senere vil der blive ansat Assistenten, som kunne staae Forstanderne bi, dels ved de Rækker af Observationer og Analyser, som nærmest blive at foretage i Teknikens Interesse, dels ved de reent videnskabelige Laboratoriearbejder. Disse Assistenten ville saaledes faae Leilighed til, alt efter deres Anlæg og indre Kald, at uddanne sig til kyndige Teknikere eller til videnskabelige Forskere.

Derimod har jeg meent, at Laboratoriet ikke bør gjøres til en Læreanstalt for Elever.

Da et saadant, for Specialstudier beregnet Institut imidlertid kun kan trives, naar det bæres af den Aand og gennemtrænges af det Lys, som udgaar fra Videnskaberne i det Hele, og da dette Lys for mig har været en Kilde til Lykke og Velvære, ligger det mig paa Hjerte, som et Afdrag paa min Gjæld, ogsaa at yde et Bidrag til Videnskabernes Fremme i Almindelighed, navnlig i de Retninger, hvori det forekommer mig, at Staten ikke hidtil har anvendt og til hvilke den vel heller ikke i Fremtiden vil kunne afsee alle de fornødne Midler.

Jeg sigter herved til: midlertidige Honorarer for yngre Videnskabsmænd, hvis Begavelse og indre Kald gjøre dem særligt

skikkede til senere at ansættes som Docenter; ligeledes til Honorarer eller Gager for Mænd, som ere fortrinligt udrustede til videnskabelig Forskning og Forfattervirksomhed og som helst maatte kunne offre hele deres Kraft dertil, uden at hindres af Lærervirksomhed eller anden Embedsgjærning; fremdeles til Reise-stipendier for ældre Videnskabsmænd, som enten paa gjentagne, kortere Besøg i Udlandet eller paa længere Reiser kunne høste et for den danske Videnskabelighed frugtbringende Udbytte; og endvidere til at fremme forskjellige videnskabelige Arbejder, saasom Undersøgelser og Besvarelser af Spørgsmaal, hvis Løsning til en given Tid er magtpaaliggende, o. s. v.

Med dette udvidede Formaal for Øie har jeg idag stiftet et Fond — under Navn af «Carlsberg-Fondet» — hvortil jeg har skjænket en Prioritet i min Eiendom Carlsberg (det oprindelige, saakaldte Gamle Carlsberg) paa 1 Million Kroner, som skal forrentes med 5 pCt. p. A., dog saaledes, at den fulde Renteydelse først indtræder ved min og Hustrues Død, og at der, saalænge nogen af os er ilive, ikkun erlægges en aarlig Rente af 2 pCt. Indtil videre vil Fondet saaledes kun erholde en aarlig Indtægt af 20,000 Kroner til de ovennævnte Formaalets Fremme og først efter min og min Kones Død komme til at disponere over det fulde Rentebeløb af 50,000 Kroner.

For at en saadan Stiftelse imidlertid skal kunne virke efter sin Bestemmelse i Nutid og Fremtid, maa der sikkert den en vedvarende Bestyrelse af Mænd med videnskabelig Indsigt og Dygtighed, i hvilken Henseende Tanken med Nødvendighed maa fæste sig paa det Samfund, hvori den danske Videnskabelighed hidtil har fundet og sikkert altid vil finde sine ypperste Repræsentanter, og som hos os er den eneste Institution, der er saa heldig at staae uafhængig af alle fremmede, uvidenskabelige Hensyn og Indflydelser, nemlig det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab.

Til dette høitagtede Selskab tillader jeg mig derfor at henvende mig med Bøn om, at det, ved at vælge nogle Mænd af

sin Midte til at vaage over den nævnte Stiftelse og til at lede dens Virksomhed, vil sikkre dens Bestaaen nu og i kommende Tider og sørge for at den altid kan virke til Gavn for Videnskaben og til Ære for Danmark.

For at sætte Selskabet istand til at danne sig en tydeligere Forestilling om den nævnte Stiftelses Beskaffenhed og om Planen for dens Virksomhed, vedlægger jeg Udkastet til Fondets Statutter, som tildeels ere affattede efter Samraad med D'hr. Etatsraad Steenstrup, og Professor Barfoed, hvis Velvillie og Interesse for Sagen jeg ikke nok kan paaskjønne.

I Haab om at dette mit Foretagende maa vinde det ærede Selskabs Bifald og at det vil skjænke det nye Institut den for dets Existents og Fremgang uundværlige Understøttelse, hvorom jeg herved andrager, tegner jeg mig

Med Høiagtelse og Ærbødighed

Carlsberg d. 25de September 1876.

J. C. Jacobsen,
Brygger.

Statuter for «Carlsberg Fondet».

- § I. Til dette Fond er ved Fundats- og Gavebrev af 25de September 1876 skjænket en Kapital af 1 Million Kroner med Pant i min Eiendom „**Carlsberg**“ bestaaende af Matr. Nr. 19 c., e., f., og g. og 20 c. i Valby med Bygninger, Inventarium og Have. Kapitalen bliver at forrente med 5 pCt. p. A., dog saaledes at den fulde Renteydelse først indtræder ved min og Hustrues Død, og at der, saalænge nogen af os er i Live, ikkun erlægges en aarlig Rente af 2 pCt. eller i det Hele 20,000 Kroner.

§ II. Fondets Formaal ere:

- A. at fortsætte og udvide Virksomheden i det af mig i 1875 oprettede chemiske og physiologiske «Carlsberg Laboratorium» i Overensstemmelse med dette Instituts nedenfor angivne Opgave;
- B. at fremme de forskjellige Naturvidenskaber, samt Mathematik, Philosophi, Historie og Sprogvidenskab paa de nedenfor anførte Maader.

§ III. Saalænge Fondets aarlige Indtægt indskrænker sig til det ovennævnte Beløb af 20,000 Kroner, vil dette, efter Fradrag af Administrationsudgifter, først og fremmest være at anvende til Bestridelse af de for Laboratoriets Virksomhed fornødne Udgifter. Hvad der ikke i hvert enkelt Aar maatte behøves til dette Brug, kan anvendes til det under § II. B. nævnte Formaal.

§ IV. Naar efter min og Hustrues Død den fulde Renteydelse af Capitalen indtræder, skal, ligeledes efter Fradrag af Administrations-Udgifterne, Halvdelen af Fondets Indtægt forbeholdes til Brug for Laboratoriet (§ II. A.), og den anden Halvdeel til Formaalet B. (cfr. § II.). I Udredelsen af Administrations-Udgifterne tage A. og B. lige Deel.

Skulde der til sine Tider ikke behøves det hele Beløb af de til Formaalene A. eller B. henlagte aarlige Indtægter, oplægges Resten midlertidigt som Sparepenge til Brug for hvert især, efterhaanden som der bliver Trang dertil, eller til Benyttelse ved forestaaende større Foretagender.

Dersom det imidlertid skulde blive klart, at der i en nær Fremtid ikke vil blive Brug i den enkelte Afdeling for dens oplagte Sparepenge, kunne disse, naar Directionen ved en eenstemmig Beslutning vedtager det, anvendes til Bedste for den anden Afdeling.

§ V. Fondet bestyres af en Direction, bestaaende af 5 Medlemmer, valgte af det Kgl. Danske Videnskabernes Sel-

skab ud af dets egen Midte. Valget gjælder for 10 Aar. Hvert andet Aar afgaaer et Medlem, — i første Valgperiode efter Lodtrækning. Den Udtrædende kan gjenvælges. Afgaaer et Medlem før Valgperioden er udløben, indtræder den i hans Sted Valgte for Resten af den Afgangnes Functionstid. Direktionen vælger af sin Midte en Formand hver Gang et ordinært Directeurvalg har fundet Sted. Den vedtager selv sin Forretningsorden.

- § VI. Til tre af Directionens Medlemmer overdrages det særlige Hverv, i Forbindelse med 1 eller 2 Tilforordnede, at danne Laboratoriets Bestyrelse. Disse tre Medlemmer skulle være Naturkyndige. Den eller de Tilforordnede vælges af Videnskabernes Selskab blandt Mænd udenfor sammes Midte, der enten som Bryggerikyndige eller af andre Grunde maae antages at have Kjendskab til og Interesse for det, der er Laboratoriets Opgave. De vælges paa 5 Aar og kunne gjenvælges.

Laboratoriestyrelsen vedtager selv sin Forretningsorden og vælger sin Formand, som forbliver i denne Stilling indtil hans Functionstid som Directeur er udløben.

- § VII. Directionens Medlemmer oppebære hvert et aarligt Honorar af 400 Kroner. De tre Laboratoriestyrere erholde desuden hver et Tillæg af 300 Kroner. Hver af Formandsposterne honoreres med 200 Kroner. De Tilforordnede honoreres hver med 300 Kroner.

- § VIII. Carlsberg-Laboratoriets Opgave skal være ved selvstændige Undersøgelser at prøve de Lærdomme, som Videnskaben allerede har tilveiebragt, og at udvikle dem ved fortsatte Studier til et muligt fuldstændigt videnskabeligt Grundlag for Maltnings-, Brygnings- og Gærings-Operationerne.

Ved Ansættelse af Assistenten bør der virkes for, at der efterhaanden kan uddannes flere Forskere i de herhen hørende Grene af Chemien og Physiologien.

Til de Arbejder, hvormed Laboratoriet bør beskæftige sig, kan for Tiden henregnes:

- a. Undersøgelser, saavel chemiske som physiologiske, af de til Brygning anvendelige Sædarter, særlig af Bygget og dets Varieteter, samt af Grunden til disses forskellige Egenskaber, saasom Klima, Jordbund, Dyrkningsmaade, Modningsgrad o. s. v.;
- b. Lignende Undersøgelser af Humlen og Udforskning af Methoder til at bestemme dens virksomme Bestanddele, samt Undersøgelser af disse Stoffers Forhold og Virkemaade under Brygningen og Gjæringen;
- c. Et grundigt Studium af de i Sædarterne værende Stoffer, navnlig Meelstof og dets Overgangsformer, Dextrin, Sukker, m. fl., samt Æggevidestofferne og disse Stoffers Forhold og Omdannelser under Brygningsoperationerne, saasom:
 - under Maltningen (Udblødningen, Spiringen og Kølletørringen) og ved Anvendelsen af forskellige Methoder;
 - under Mæskningen og Kogningen (Infusions- og Decoctions-Methoder, Kogning ved directe Hld, ved Damp, under Tryk, o. s. v.);
 - under Nedsvalingen (den atmosfæriske Lufts Indflydelse, modsatte Systemer, Baudelots og Pasteurs, o. s. v.);
 - under Gjæringen i Forhold til de forskellige Maltning- og Brygningsmetoder;
- d. Undersøgelser og Studier af Gjærplanten, dens Udvikling, Væsen og Virksomhed under forskellige Betingelser og i de forskellige Stadier, samt Luftens, Lysets, Varmens og Electricitetens Indflydelse derpaa, m. m.;
- e. Undersøgelser over de andre under Gjæringen op-

trødende Fermenter, Melkesyre-, Eddikesyre-, Smør-syre-Fermenter, m. Fl.;

- f. Undersøgelser af det færdige Product, Øllet, dets Egenskaber og Betingelserne for dets Smag, Holdbarhed, Forædling, o. s. v.;
- g. Undersøgelser af Grundene til de stundom indtrædende Uregelmæssigheder i Brygningsoperationerne og i det Hele Studier til Forklaring af alle særegne Phænomener;
- h. Prøvelse af de af andre Naturforskere meddelte Iagttagelser og Opdagelser og af de derpaa byggede Hypotheser og Theorier.

De vundne Resultater offentliggøres i inden- og udenlandske Tidsskrifter eller paa anden Maade, dels som offentlig Redegjørelse for Institutets Virksomhed, dels ligeoverfor Udlandet som et Vidnesbyrd om, at der fra dansk Side tages hæderlig Deel i Videnskabens Udvikling i de Retninger, hvorom her er Tale. Intet Resultat af Institutets Virksomhed, som har Betydning i theoretisk eller praktisk Henseende, maa hemmeligholdes.

Det maa betragtes som en Selvfølge, at de Mænd, som forestaae Laboratoriet, ved Siden af deres Arbejder i Institutets specielle Retning, maae stræbe at bevare og udvikle deres videnskabelige Dygtighed i Almindelighed ved andre Studier og Undersøgelser, dog saaledes, at Institutets Hovedopgave ikke tilsidesættes eller tabes af Sigte.

Forsaavidt de disponible Midler strække til og Bestyrelsen finder det hensigtsmæssigt, bør der fra Tid til anden gives Forstanderne Leilighed til ved Reiser at knytte personlig Forbindelse med Naturforskere i andre Lande, som virke i lignende Retning, og at gjøre sig bekendte med tilsvarende Instituter i Udlandet og deres Arbejder.

Institutet maa ikke paatage sig at virke som en «Bryggerskole» for Elever uden videnskabelig Fordannelse, ei heller foretage Analyser for eller udstede Attester til Uvedkommende.

- § IX. Den til Videnskabernes Fremme i Almindelighed bestemte Sum (cfr. §§ II. B., III. og IV.) skal fortrinsviis anvendes til:
- a. Reisestipendier for ældre Videnskabsmænd paa indtil 3,000 Kroner, enten til gjentagne kortere Besøg i Udlandet, eller til længere Reiser;
 - b. Midlertidige Honorarer til yngre Videnskabsmænd, hvis Begavelse og indre Kald gjøre dem særlig skikkede til senere at indtræde i offentlig Virksomhed;
 - c. Lønninger for Livstid eller for visse Aar til udmærkede Mænd, som kunne virke heldigt som «frie Videnskabsmænd» udenfor en offentlig Stilling;
 - d. Stipendier eller Honorarer paa indtil 2000 Kroner for specielle Studier eller Undersøgelser;
 - e. Bidrag til videnskabelige Arbeiders Fremme.
- Foranførte Bestemmelser gjælde baade for Medlemmer og for Ikke-Medlemmer af Videnskabernes Selskab og ligesaa for videnskabelige Arbeider i og udenfor Selskabet.

- § X. Directionen forvalter Fondets Midler. Den foranstalter under sin Kontrol dets Kasse- og Regnskabsvæsen besørget ved en dertil antaget, lønnet Regnskabsfører, hvis Regnskab revideres af 2 Directeurer. Decision og Qvittance gives af den samlede Direction.

Den vedtager det aarlige Budget og tager Beslutning om Anvendelsen af den til forskjellige Videnskabers Fremme bestemte Sum i Henhold til § IX.

Den meddeler Selskabet en aarlig Beretning om Fondets Anvendelse og om Laboratoriets Virksomhed, samt Oversigt over Fondets Indtægt, Udgift og Status.

Den gjør Indstilling til Selskabet om Valget af Tilforordnede til Laboratoriebestyrelsen.

- § XI. Laboratoriebestyrelsen varetager Alt, hvad der angaaer det særlige Overtilsyn med Laboratoriets Virksomhed, dets Lokaler, Inventarium o. s. v.

Den ansætter Laboratoriets Forstandere, hvilken Ansættelse fra begge Sider kan opsiges med 1 Aars Varsel.

Den antager efter Forhandling med Forstanderne de fornødne Assistenten paa tre Maaneders Opsigelse.

Som Laboratorieforstandernes Foresatte vaager den over, at den statutmæssige Plan for Laboratoriets Virksomhed følges. Uden at gribe ind i Forstandernes selvstændige videnskabelige Virksomhed, forhandler den med dem om Udførelsen af saadanne Arbejder, som kunne kaste et videnskabeligt Lys over specielle Operationer i Bryggeriet o. s. v.

Den affatter Forslag til det aarlige Budget for Laboratoriet og vaager over dets Overholdelse.

Den gjør Forslag til Directionen om extraordinære Foranstaltninger udenfor det ordinære Budget og om Anvendelsen af de for Laboratoriets Vedkommende oplagte Sparepenge.

- § XII. Laboratorieforstanderne skulle ved lagttagelser og Undersøgelser, hvortil Operationerne i Bryggeriet give Anledning, samt ved Studier og Arbejder i Laboratoriet uddanne sig i de særlige Retninger af Videnskaben, som have Betydning for Ølbrygningen.

De skulle aarlig meddele Bestyrelsen en udførlig Rapport over de udførte Arbejder. De Meddelelser herom, som Bestyrelsen finder det hensigtsmæssigt at offentliggjøre, skulle de udarbejde i en dertil egnet Form. Medfører Udgivelsen Udgifter, afholdes disse af Laboratoriets Budget, men giver den Indtægt, tilfalder denne Forfatteren.

Saalænge de ere i Laboratoriets Tjeneste, maae de ikke paatage sig at være Consulenter for Andre og ei heller befatte sig med anden Virksomhed for egen Reg-

ning eller for Private. Uden Bestyrelsens Samtykke maa de heller ikke paatage sig nogen offentlig Virksomhed, og dersom Bestyrelsen maatte finde en saadan ønskelig og forenelig med Laboratoriets Tarv, kan Bestyrelsen betinge Samtykket af en forholdsmæssig Afkortning i den aarlige Gage.

De maae ikke modtage Valg til Rigsdagen.

De antage og afskedige de underordnede Betjente og vaage over god Orden i Laboratoriet.

De besørge Anvendelsen af de budgetterede Summer, som stilles til deres Raadighed til løbende Udgifter og aflægge Regnskab derfor til Bestyrelsen.

- § XIII. Laboratorieforstanderne lønnes mindst lige med Universitetsprofessorer paa samme Alderstrin, men ere ikke pensionsberettigede. Under særlige Omstændigheder kan Directionen dog, efter Bestyrelsens Indstilling, tilstaae dem en midlertidig eller livsvarig Understøttelse af Laboratoriets Konto.

§ XIV. Om Forandring i Statutterne.

Naar Directionen i Tidens Løb finder det nødvendigt, at disse Statuter forandres, maa den gjøre Indstilling til Videnskabernes Selskab om de Forandringer, hvorom samtlige Medlemmer af Directionen ere enige, og Selskabet tager da Beslutning om de indstillede Forandringer. Dersom Selskabet foreslaaer Ændringer i Directionens Indstilling, kunne disse Ændringer først komme til Afstemning i et nyt Møde 4 Uger efter at Directionen har meddeelt Selskabet, at den med Eenstemmighed har tiltraadt Ændringsforslagene.

Carlsberg-Laboratoriets Formaal (§ VIII) maa dog ingen-
sinde opgives og dette Institut maa aldrig skilles fra
Eiendommen «Carlsberg», saalænge der i samme drives
Bryggeri; eiheller maa Laboratoriet nogensinde sammen-
smeltes med noget andet Institut.

Carlsberg, den 25de September 1876.

J. C. Jacobsen.

Efterat Præsidenten havde ladet oplæse den ovenfor S. (31) aftrykte Skrivelse til ham, udviklede han i Korthed hvorledes Sagen stillede sig for ham, baade naar han med ubetinget Glæde saa hen til Gavens overordentlige Storartethed, til det Fædrelandssind og den Erkjendelse af Videnskabens inderlige Sammenhæng med praktisk Virken, som den var et Udtryk for, samt til den store Tillid, Giveren havde vist Selskabet, og naar han betragtede de Betænkeligheder, der maaske kunde reise sig ved at se hen til det overordentlig store Ansvar overfor Stifteren og Fædrelandet, som Selskabet paatog sig og som maaske kunde befrygtes at overgaa Selskabets Kræfter, eller til den mulige Ligevægts-Forstyrrelse, der ved Hvervets Modtagelse og ved Overdragelsen til enkelte Medlemmer af en saa stor Indflydelse paa videnskabelige Formaalets Fremme, maaske kunde fremkaldes indenfor Selskabet. Dog mente han, at disse Betænkeligheder maatte falde bort, navnlig under Hensyn til den klare Form, hvori Statutterne forelaa, saa at disse vel paalagde Selskabet at vælge Fondets Bestyrere, men dog selve dettes Bestyrelse laa udenfor Selskabet. Han maatte derfor udtale som sin Overbevisning, at Selskabet i Tillid til sine Kræfter og til en ærlig Virken med disse turde overtage det Hverv, Stifteren havde ølsket at lægge i dets Hænder, og med Glæde og

Tak burde tage det til Videnskabens Fremme og Fædrelandets Hæder skjænkede Fond under sin Varetægt.

Efterat Præsidenten derpaa havde opfordret Medlemmerne til at ytre sig om Sagen, tog Selskabets ældste tilstedeværende Medlem, Etatsraad Bendz Ordet for at udtale, at Præsidenten vistnok fuldelig havde udtrykt hvad der i Almindelighed bevægede sig hos Medlemmerne, da de den 25de September modtog den ligesaa glædelige som overraskende Meddelelse. Han følte, at han ikke alene for sin Del maatte slutte sig til Præsidentens Konklusion, men ogsaa turde opfordre sine Kolleger til at gjøre det Samme, og til med Glæde og Tak at modtage det storartede og hædrende Tilbud uden al Diskussion.

Da efter skeet Opfordring Ingen begjærede Ordet lod Præsidenten afstemme om Modtagelsen af Tilbudet under de i «Udkast til Statuter for Carlsbergfondet» knyttede Betingelser. Alle tilkjendegave deres Samstemning ved at rejse sig, og Selskabet overtog saaledes enstemmig det Hverv, som Stifteren havde tiltænkt det.

Et af Præsidenten foreslaaet Udkast til en Svarskrivelse til Kapitajn Jacobsen fandt almindelig Tilslutning, og Selskabet vedtog at lade den overbringe af Præsidenten, (Madvig), Sekretæren (Steenstrup), samt det ældste tilstedeværende Medlem af hver Klasse: Etatsraad Bendz og Etatsraad Westergaard.

Endelig vedtoges det at betragte Meddelelsen som konfidentiel, indtil Præsidenten den 2den Oktober havde forebragt den for Selskabets ophøjede Protektor, H. M. Kongen.

Svarskrivelsen lød saaledes:

«Ved Skrivelse af 25de dennes har De, højtærede Herre, tilstillet det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab Udkast til Statuter for en af Dem ved Gavebrev af samme Dag oprettet Stiftelse til videnskabelige FormaaIs Fremme, «Carlsbergfondet», og anmodet Selskabet om at paatage sig nu og for Fremtiden at danne Stiftelsens Bestyrelse ved Valg imellem dets Medlemmer i Henhold til de i Statuterne fastsatte Regler. Idet vi først og fremmest udtale vor inderlige Paaskjønnelse af den paa engang oplyste og patriotiske Aand, hvoraf Stiftelsen er fremgaaet og af den højhjertede og storartede Rundhaandethed, hvormed den er udstyret, og idet vi hertil føje Udtrykket af vor fulde Erkjendelse af den hædrende Tillid, hvormed De har bæret Selskabet, erklære vi os efter enstemmig Beslutning herved med Glæde villige til at udføre det Hverv, hvortil vi ere opfordrede, og ønske, at det maa lykkes Selskabet stedse at gjøre dette paa en saadan Maade, at derved bidrages til, at Stiftelsen kan virke «til Gavn for Videnskaben og til Ære for Danmark». Vi haabe, at denne Virksomhed i lang Tid maa udfolde sig under Stiftelsens Øje og Deltagelse.

Valget af den første Bestyrelse vil kunne foregaa, saasnart De som Stifter efter Fundatsens Konfirmation og Statuternes endelige Udfærdigelse anser det for ønskeligt.

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab i Kjøbenhavn,
den 29de September 1876.

Paa Selskabets Vegne

J. N. Madvig,
Selskabets Præsident.

Japetus Steenstrup,
Selskabets Sekretær.

Hr. Kapitajn Brygger *J. C. Jacobsen.*
R. af D. og DM. pp.

Carlsberg.»

9. Mødet den 13^{de} Oktober.

(Tilstede vare 25 Medlemmer: Madvig, Præsident, Worsaae, Reinhardt, Colding, Müller, Steen, Thorsen, Barfoed, Holm, Grundtvig, Lütken, Zeuthen, Schjellerup, Schmidt, Oppermann, Fausbøll, Krabbe, Sekretæren, Westergaard, Johnstrup, Ussing, Bendz, Lange, Panum, Schiern).

Præsidenten meddelte Selskabet Beretning om hans Audients hos H. M. Kongen, Selskabets Protektor, i Anledning af Carlsberg-Fondet, samt om Deputationens Overbringelse af Selskabets Skrivelse til Kapitajn Jacobsen.

Etatsr. Professor Japetus Steenstrup meddelte Selskabet sine Oplysninger til Kong Alfreds i Ottars Rejse optagne, men hidtil misforstaaede Beretninger om Hvalros- og Hvalfangsten i Norden i det 9de Aarhundrede, og knyttede denne Meddelelse til en tidligere, som han i Mødet den 12te Juni 1874 havde givet om en efter Prof. Johnstrups og hans egne Undersøgelser meget udstrakt og til et iskoldt Hav hørende Havbund i Vendsyssel.

Derefter gav Sekretæren en Oversigt over, hvad der siden sidste ordinære Møde var forefaldet:

Fra Gehejmerraad Otto Struve i Pulkova og fra Rektor Jón Thorkelsson i Reykjavik var der indkommet Takskrivelser i Anledning af deres Optagelse i Selskabet.

Af Selskabets udenlandske Medlemmer havde Døden bortrevet Professor C. G. Ehrenberg i Berlin, Medlem siden den 13de Dec. 1839, død den 26de Juni 1876; Professor Christian Lassen i Bonn, Medlem siden den 11te Dec. 1846, død den 9de Maj 1876, samt det iaar optagne Medlem, den bøhmiske Historiograf Franz Palacky, der var død den 26de Maj 1876 i Prag.

Under 7de Maj havde Prof. Rektor Lund i Aarhus tilmeldt Selskabet, at han havde modtaget sit indsendte Haandskrift til Ordbogen tilbage og takkede Selskabet for den tilstaaede Understøttelse.

Fra Adjunkt C. Grønlund var der, efter at han var hjem-

kommen fra sin botaniske Undersøgelsesrejse paa Island, under 23de September indkommet følgende Skrivelse:

«Undertegnede har endnu ikke bragt det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab sin Tak for det Bidrag paa 500 Kroner, som Selskabet tilstod mig i Foraaret, for at jeg kunde afslutte mine botaniske Undersøgelser af Floraen paa Island, idet jeg ansaa det for rettest at opsætte dette, indtil jeg samtidig hermed kunde gjøre Rede for Udfaldet af min Rejse. Idet jeg herved bringer det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab min oprigtige Tak, undlader jeg ikke at meddele, at Rejsen nu er lykkelig afsluttet og at den, som jeg haaber, skal bære gode Frugter i videnskabelig Henseende.

Den 8de Juni ankom jeg til Reykjavik, og medens jeg gjorde Forberedelser til en større Rejse til Nordlandet, undersøgte jeg Foraarsfloraens Fremkomst i Omegnen af denne By og foretog mig en interessant Rejse til Egnen syd for Hvalfjorden, hvor jeg i Forening med den begavede og gjæstfri Præst i Reynivellir Sira Thorvaldr undersøgte baade Fjelde og Dale, Kløfter og Fjorde. Den 1ste Juli tiltraadte jeg, ledsaget af en Fører, Rejsen til Nordlandet med 4 Rideheste og to Bagageheste, der bare det paa en saadan Rejse nødvendige Telt, Soveposen, Fødevarer m. m. Vejen gik omkring Esjen til Brynjudalen, over Reykholt, hvor jeg undersøgte Vegetationen ved flere varme Kilder, Kalmanstunga, over den højliggende Grimstungahede til Grimstunga, Reykir ved Svinavatn, Vidimyri, Øxnadalshede til Akreyri og derfra til Reykjahlid ved Myvatn. Her opholdt jeg mig i 10 Dage og foretog interessante Udflugter dels i Forening med Professor Johnstrup, dels med dennes Assistent, Student Thoroddsen, som han velvillig havde stillet til min Raadighed.

Hjemrejsen lagde jeg mere nordlig og vestlig, idet jeg fra Akreyri red langs med Vestsiden af Eyafjorden til Vellir og derfra over den højtliggende, snedækkede Herjedalshede til Holar

og Skagefjorden. Fra Holar tog jeg atter over Vidimyri og Reykir og derfra over Lækjamót, Stadarbakki, Melar, Hvammr, Reykholt, Thingvellir tilbage til Reykjavik, hvortil jeg ankom den 20de August efter en Rejse paa 51 Dage.

Jeg har fremhævet de Steder, hvor jeg opholdt mig i een eller flere Dage. Overalt havde jeg et godt Udbytte dels med Hensyn til Kjendskab til de allerede tidligere paa Island fundne Planters større eller mindre Udbredelse, dels med Hensyn til Iagttagelsen af Former, hvis Forekomst paa Island var tvivlsom, eller som slet ikke før vare fundne paa denne Ø.

Den sidste Del af mit Ophold paa Island tilbragte jeg atter i og ved Reykjavik, hvor jeg iudsamlede Frø af flere Planter til den botaniske Have og undersøgte Efteraarsfloraen. Efter min Hjemkomst forestaar der mig endnu det vidtløftige Arbejde at ordne og undersøge mine Fund; den mikroskopiske Undersøgelse af de lavere Planter vil navnlig medtage lang Tid, men jeg skal bestræbe mig for at forkorte denne saa meget som muligt, og det er mit Haab, at der skal blive mig forundt tilstrækkelige Kræfter og tilstrækkelig Tid til at kunne gjøre mine Undersøgelser frugtbare for Videnskaben. Kun derved kan jeg vise det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab min Erkjendtlighed for den mig tilstaaede Understøttelse.

Kjøbenhavn, den 23de September 1876.

Ærbødigst

C. Gronlund.»

Af Oversigterne var det 1ste Nr. for 1876 udkommet den 1ste Juli, og Slutningshæftet, Nr. 2 og 3, for 1875 den 7de August.

Sekretæren meddelte derpaa, at der angaaende Kapitajn Buchwalds Afhandlinger om Differentiation var af den nedsatte Komité (Steen, Lorenz, Zeuthen) afgivet følgende Betsanking:

«Selskabet har forlangt en Udtalelse af os om to af Kapitain af Generalstaben F. Buchwald indsendte Afhandlinger, som Forfatteren har ønsket optagne i Selskabets Skrifter eller Oversigter.

I den første af disse Afhandlinger udvikler Forfatteren en ny Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices, idet han vælger en anden Definition end den af Liouville indførte. Liouville er gaaet ud fra Differentiationen af den exponentielle Funktion e^x og har dernæst vist, hvorledes Differentiationen af andre Funktioner lader sig udføre. Senere har Professor Kelland benyttet den saaledes afledede Form for Differentiationen af x^n som Udgangspunkt for sine videre gaaende Undersøgelser. Det er fra denne sidste Funktion, at Forfatteren her ligeledes er gaaet ud, men han foretrækker at definere dens almindelige Differentialkoefficient paa en anden Maade end sine Forgængere, idet han gjør opmærksom paa forskellige Ulemper ved den Liouville'ske Methode. I den anden Afhandling viser Forfatteren Anvendelsen af sin Methode til Løsningen af forskellige Opgaver, idet han søger at godtgjøre, at Methoden i alle Anvendelser kan træde i Steden for den Liouville'ske.

Ved at sammenholde de to Definitioner af Differentialkoefficienterne af x^n ser man, at de, skjønt forskellige, ere fuldkommen analoge; de ere lige simple, og de komplementære Funktioner lade sig lige let udlede af dem begge. Vi skjønte heller ikke rettere, end at begge Methoder i Almindelighed ville vise sig at være lige anvendelige, om end nogle Opgaver kunne være lettere at behandle efter den ene, andre efter den anden Methode, og med Hensyn til de af Forfatteren paapegede Ulemper ved Liouvilles Methode maa bemærkes, at heller ikke Forfatterens Methode gaar fri for Ulemper. Saaledes vil efter Forfatterens Definition Differentialkoefficienten med bruden Index af den konstante Størrelse x^0 ikke blive Nul, men en bestemt af x afhængig Størrelse. Dette var ogsaa en af Grundene til, at Kelland, som selv har anført den af Forfatteren forsvarede

Definition, forkastede denne. Hvad angaar Antallet af de Værdier, som erholdes ved Differentiationen med bruden Index, kunne vi ikke se, at der er nogen væsentlig Forskjel imellem Forfatterens og Kellands Metoder.

Imidlertid har Spørgsmaalet om en Udydelse af Differentiation til hvilket som helst Indices en saa stor videnskabelig Interesse, at det maa betragtes som et fortjenstligt Arbejde atter at optage det og underkaste det en fornyet Drøftelse. Dette betydelige Arbejde er udført af Forfatteren med Dygtighed, idet han omhyggelig har gennemført Konsekvenserne af sin Methode og vist dens Anvendelighed til Løsning af forskjellige Opgaver. De af Liouville behandlede Exempler ere atter gennemgaaede, ofte tillige med en større Fuldstændighed, og i et enkelt Tilfælde har Forfatteren paavist en Fejl hos Liouville.

Vi ville derfor foreslaa, at Selskabet viser Forfatteren sin Anerkjendelse af hans videnskabelige Arbejde ved Optagelsen af Afhandlingerne i Selskabets Skrifter.

Adolph Steen.

L. Lorenz,
Affatter.

H. G. Zeuthen.»

I Henhold til denne Betænkning besluttede Selskabet at optage Afhandlingerne i Skrifterne.

Fremlagte i Mødet vare de paa Boglisten under Nr. 372—78 og Nr. 383—421 opførte Skrifter.

Umiddelbart til Universitetsbibliotheket var der fra Sekretariatet blevet afgivet d. 10de Juni 1876 Boglistens Nr. 209—258; d. 25de Juli 1876 sammes Nr. 259—314, og d. 9de August Nr. 315—367.

Overordentligt Møde den 27^{de} Oktober.

(Tilstede vare 29 Medlemmer: Madvig, Præsident, Bendz, Westergaard, Ussing, Worsaae, Hannover, Reinhardt, Colding, Panum, Holten, Thomsen, Steen, Thorsen, Johnstrup, Barfoed, Lange, Lorenz, Holm, Lütken, Rørdam, Zeuthen, Schjellerup, Jørgensen, Schmidt, Oppermann, Christiansen, Fausbøll, Krabbe, Sekretæren).

Præsidenten meddelte, at Statutterne for Carlsbergfondet vare blevne ham tilstillede som konfirmerede af H. M. Kongen og derpaa overgivne til Højesterets-Advokat Brock, der vilde besørge dem thinglæste.

I Henhold til Statutternes § V og VI foretoges Valg først paa tre naturkyndige Medlemmer af Selskabet, der skulde udgjøre Bestyrelsen for Carlsberg Laboratorium. Valgte bleve Prof. Barfoed, Etatsr., Prof. Steenstrup og Prof. Panum.

Som de to andre Medlemmer af Fondets Bestyrelse bleve valgte Konferentsraad Madvig og Prof. Holm.

Alle de Valgte modtog Valget. Inden Mødets Slutning meddelte de Selskabet, at de om faa Dage vilde træde sammen, for at konstituere sig som Direktion, vælge Formand o. s. v. [se Beretningerne om Møderne d. 10de November og d. 24de November, af hvilke her for Sammenhængens Skyld meddeles, at til Formand i Carlsbergfondets Direktion valgtes Konferentsraad Madvig, og at Sekretariatsforretningerne midlertidig overtoges af Direktionens yngste Medlem: Prof. E. Holm, samt at Laboratoriebestyrelsen nu var fuldtallig, da de Herrer Kapt. Brygger Jacobsen, Fondets Stifter, og Brygger E. Kogsbølle paa Carlsberg havde velvilligen modtaget det paa dem faldne Valg som Tilforordnede i Bestyrelsen, cfr. Statut. § VI. I denne Bestyrelses første Møde blev Prof. Barfoed valgt til Formand].

10. Mødet den 27^{de} Oktober.

(Tilstede vare 16 Medlemmer: Madvig, Præsident, Westergaard, Ussing, Hannover, Panum, Thorsen, Lange, Holm, Lütken, Rørdam, Schmidt, Oppermann, Fausbøll, Krabbe, Sekretæren, Schiern).

Prof. Universitetsbibliothekar P. G. Thorsen meddelte paa Regesta-Kommissionens Vegne en Udsigt over Arbejdets Fremgang i forskjellige Retninger og over hvad der i den nærmeste Fremtid var at gjøre. I Beretningen henstilledes, at Excerperingen til Værket afbrødes med Dokumenter i trykte Skrifter, yngre end 1874, hvilket bifaldtes af Selskabet. Ligesaa bilignedes, at Honoraret for Gjennemlæsningen af tidligere excerperede Skrifter overlades til Kommissionens gode Skjøn.

Sekretærens Forespørgsel, om de paa Boglisten som Nr. 368—71 opførte Skrifter fra Maharajaen i Burdwan, Bengalen, maatte gaa til Universitetsbibliotheket, som deraf kun besad et enkelt Bind, besvaredes bekræftende af Selskabet, der tillige besluttede at sende Maharajaen et passende indbundet Exemplar af G. Stephens's: *Runic Monuments*.

Redaktøren fremlagde 11te Binds Nr. 3 af den 5te Rækkes matematisk-naturvidenskabelige Afdeling nemlig A. Coldings Uundersøgelser over de ved Vindens Kraft fremkaldte Strømninger i Havet; og Sekretæren fremlagde fra Hr. Docent Zeuthen et Hæfte af *Mathematische Annalen*, hvori findes trykt hans Afhandling: *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques*.

I Mødet vare fremlagte de paa Boglisten under Nr. 368—371 og 422—451 anførte Skrifter.



11. Mødet den 10^{de} November.

(Tilstede vare 13 Medlemmer: Madvig, Præsident, Westergaard, Hannover, Panum, Holm, Lütken, Zeuthen, Jørgensen, Schmidt, Smith, Fausbøll, Krabbe, Sekretæren).

Førend Mødets egentlige Forhandlinger begyndte, meddelte Præsidenten Medlemmerne, at den i det sidste overordentlige Møde for Carlsbergfondet valgte Direktion af 5 Medlemmer havde konstitueret sig som saadant og at den, i et afholdt Møde, til sin Formand for den første Valgperiode af to Aar havde valgt Konferensraad Madvig, Videnskabernes Selskabs Præsident, samt at Medlemmerne af Bestyrelsen havde foretaget den i Statuternes § V fastsatte Lodtrækning med Hensyn til Fratrædelses-Tiden for hver Enkelt. Loddet havde afgjort, at om to Aar fratræder Prof. Holm, om fire Aar Etatsraad Steenstrup, om sex Aar Konferensraad Madvig, om otte Aar Prof. Panum og om ti Aar Prof. Barfoed.

Endvidere meddelte den valgte Eormand, at Direktionen var bleven enig om at indstille til Selskabet, at dette vilde anmode Fondets Stifter, Hr. Kapitajn Jacobsen, og hans Medbestyrer Hr. Kogsbølle om at træde ind som Tilforordnede i Laboratoriebestyrelsen. Dette Forslag havde ikke været anmeldt paa Mødesedlen og Præsidenten opfordrede derfor enhver af de Tilstedeværende til at tilkjendegive, om der kunde antages at være Noget til Hinder for strax at afstemme derover. Da ingen af Medlemmerne fandt Noget at indvende herimod, skred man til Afstemning; og Selskabet vedtog enstemmigt at tiltræde Forslaget.

Derefter meddelte Professor Panum nogle Oplysninger om Misdannelsens fysiologiske Betydning. Denne Meddelelse er ikke bestemt for nogen af Selskabets Publikationer.

Sekretæren gav derpaa nogle Oplysninger om Benyttelsen af Selskabets Lokaler, angaaende de i Vinterhalvaaret lovede Foredrag og om nogle Sendinger, af Bøger navnlig fra Littré, Quetelet, Wyatt, Ross, Hinrichs og Prestwich.

I Anledning af en Forespørgsel af Sekretæren besluttede Selskabet at tilstille Universitetets geologiske Museums Bibliothek Ministerialraad Wex's Arbejde: *Ueber die Wasserabnahme in den Quellen* etc. tilligemed de fra Wiener Akademiet med samme fremsendte tvende «Komitéberichte», samt hvad der senere maae indkomme til Selskabet angaaende dette vigtige Spørgsmaal.

Sekretæren gav dernæst en Beretning om en i Ferietiden foretagen Omflytning af Selskabets Oplag af Skrifter. Denne havde været nødvendig for at vinde Plads.

Sekretariatet havde ikke modtaget nogen Besvarelse af de Prisspørgsmaal, for hvilke Fristen udløb den 31te Oktober.

Af Roeskilde Domkirkes Beskrivelse fremlagdes det 7de Hæfte.

Fra Cand. juris. Johannes Steenstrup var der indkommet et Andragende om Understøttelse til et 3 Maaneders Ophold i Paris og Normandiet, for at han kunde blive i Stand til at fortsætte sine historiske Forskninger over Normannerne. Med Andragendet fulgte 1ste Del af disse Studier: «Indledning i Normannertiden». Andragendet henvistes til den historiske Klasses Betænkning.

I Mødet vare fremlagte de paa Boglisten under Nr. 452—474 anførte Skrifter.

12. Mødet den 24^{de} November.

(Tilstede vare 22 Medlemmer: Madvig, Præsident, Martensen, Westergaard, Ussing, Reinhardt, Colding, Müller, Panum, Schiern, Steen, Thorsen, Holm, Grundtvig, Lütken, Zeuthen, Jørgensen, Schmidt, Oppermann, Smith, Fausbøll, Krabbe, Sekretæren).

Konferensraad Prof. Dr. J. N. Madvig meddelte Bemærk-

ninger om T. Livius's Fremstilling af den romerske Historie under Henblik til den antike Historieskrivning (se nedf. S. 158—173).

Formanden for Selskabets historisk-filosofiske Klasse meddelte derpaa Navnene paa 4 nye indenlandske Medlemmer og 1 nyt udenlandsk, som Klassen i næste Møde agtede at foreslaa.

Den matematisk-naturvidenskabelige Klasse ønskede Udsættelse af Anmeldelsen om dens Forslag til næste Møde. Selskabet tillod denne Udsættelse.

Præsidenten meddelte derpaa, at de som Tilforordnede til Carlsbergfondets Laboratoriebestyrelse valgte Herrer, Kapitajn Jacobsen og Brygger Kogsbølle havde svaret, at de med Glæde modtog Valget.

Paa Sekretærens Forespørgsel angaaende de mindre Udgifter i Anledning af Carlsbergfondets Oprettelse, saasom til Trykning af Cirkulærer, Statuter m. m., besluttede Selskabet, at de nævnte Udgifter skulde falde paa Selskabets Sekretariats-Udgifter, saa at Udgifterne paa Fondets Regning først begynde med Direktionens Konstitution og Virken.

Die K. K. Akademie der Wissenschaften i Wien havde sendt Selskabet sin Tak i Anledning af Oversendelsen af Særtryk af Selskabets Komité's Betænkning over Wex's Arbejde.

I Mødet fandtes fremlagte de paa Boglisten under Nr. 475—489 anførte Værker.

13. Mødet den 8^{de} December.

(Tilstede vare 20 Medlemmer: Madvig, Præsident, Ussing, Worsaae, Hannover, Colding, Panum, Jul. Thomsen, Steen, Thorsen, Johnstrup, Barfoed, Lütken, Schjellerup, Schmidt, Oppermann, Smith, Fausbøll, Krabbe, Sekretæren, Westergaard).

I Begyndelsen af Mødet førte Prof. Ussing Forsædet, da

Præsidenten, Konferensraad Madvig havde meddelt at han først kunde komme noget efter den fastsatte Tid.

Professor Ad. Hannover meddelte sine lagttagelser angaaende nogle Levninger af den foetale Spalte i Menneskets Øie, der med en kemityperet Tavle ville blive optagne i Oversigterne (se nedenfor S. 41—50).

Efter Forslag af den historisk-filosofiske Klasse optoges følgende fire Medlemmer:

Rasmus Nielsen Lic. theol., Dr. phil., Professor i Filosofi ved Københavns Universitet,

Sofus Heegaard, Dr. phil., Professor i Filosofi ved Københavns Universitet,

Vilhelm Thomsen, Dr. phil., Docent i sammenlignende Sprogvidenskab ved Københavns Universitet, og

Ludvig Wimmer, Dr. phil., Docent i de nordiske Sprog ved Københavns Universitet, samt

et udenlandsk Medlem:

Franz Miklosich, Professor ved Universitetet i Wien.

Formanden for den matematisk-naturvidenskabelige Klasse meddelte Navnene paa tre udenlandske Videnskabsmænd, som Klassen i næste Møde vilde foreslaa til Optagelse i Selskabet.

Redaktøren fremlagde Oversigten for 1876, Nr. 2.

Sekretæren meddelte, at Hr. Scheels af Selskabet med den Classenske Pris belønnede Afhandling om Brændevinsbrændingens Historie her i Landet nu ved Understøttelse fra det Classenske Fideikommis bliver offentliggjort.

Den matematisk-naturvidenskabelige Klasse havde til Formand valgt Prof. Ad. Steen istedenfor Prof. Jul. Thomsen, der ønskede at fratræde.

I Mødet vare fremlagte de som Nr. 490—510 paa Boglisten opførte Skrifter.



14. Mødet den 22^{de} December.

(Tilstede vare 20 Medlemmer: Madvig, Præsident, Westergaard, Ussing, Reinhardt, Colding, Panum, Steen, Mehren, Holm, Lütken, Zeuthen, Schjellerup, Schmidt, Oppermann, Christiansen, Fausbøll, Heegaard, Thomsen, Wimmer, Sekretæren).

Da Budget-Udkastet forelaa til Behandling, udsattes den videnskabelige Meddelelse til de vigtigste Forretningssager vare forhandlede.

Kassekommissionen forelagde ved sin Formand derpaa Udkastet og efter nogen Drøftelse vedtoges følgende

Budget for Aaret 1877.

Indtægter.

A. Renter af Selskabets Fonds*)	11,800	Kr.
Fra det Classenske Fideikommiss	400	—
Etatsraad Schous og Hustrus Legat	100	—
For Salget af Selskabets Skrifter omtr.	300	—
	<u>12,600</u>	Kr.
B. Fra den Hjelmstjerne-Rosenkroneske Stiftelse for 1878 omtr.	1280	—
Beholdning ved Aarets Udgang omtr.	3755	—
	<u>5035</u>	Kr.

Selskabets Kassebeholdning ved Udgangen af 1876 omtr. 3200 Kr. og en Guldmedaille.

*) Selskabets rentebærende Kapitaler ere:

1) Obligationer 4 pCt. i danske Penge:	
Indskrevne i Statskassen	110,000 Rdl.,
Rigsbanks Obligationer	3,200 —
Husejer Kreditkasse Obligationer	6,000 —
Østifternes Kreditforenings Oblig.	3,000 —
Kjøbenhavns Laans Obligationer	24,000 —
	<u>146,200 Rdl., Rente 11696 Kr.</u>
2) Bankaktier, 300 Rdlr. med Udbytte omtrent	44 —
3) Aktier i det Sjællandske Jernbaneselskab, 80 £ Sterl. med Rente 3½ £ Sterl. omtr.	60 —
	<u>Tilsammen . . . 11,800 Kr.</u>

Af Selskabets Kapitalformue betragtes 280,000 Kr. som et Fond, der ikke maa formindskes, Resten derimod som disponibel til videnskabelige Foretagender (ifølge Selskabets Beslutning af 24. April 1874).

*) Indkjøbt 2000 Rd. i Kbhvns. Laans Obligationer.

A. Til Selskabets Bestyrelse og dets Virksomhed.

	Den foreshaede Sum.	Middelsum af Udgifterne i 10 Aar, 1862-71.	Middelsum af Udgifter i 1872-75.	Udgifter i 1876.
	Kr.	Kr.	Kr.	Kr.
I. Embedsmændenes Gager og Budets Lønning	1910			
Medhjælp ved Sekretariatet	780			
Løbende Udgifter til Brænde, Lys, Porto m. v. samt Gratifikationer	1010	742	1195	1451
	3700			
II. a) Selskabets Skrifter . . .	5000	4820	5880	7491
Præmier	"	434	1340	1440
b) Ordbogen	900	80	50	50
Regestum diplomaticum	1400	468	967	983
	7300	5802	8237	9964

B. Understøttelser til videnskabelige Foretagender
og tilfældige Udgifter.

- 1) Til Pastor Brandt: Subskription af 50 Expl. af Udgaven af Chr. Pedersens Skrifter. 6te Bind. Ifølge Beslutning af 17. Marts 1848 300 Kr.

Af den Hjelmstjerne-Rosenkroneske Stiftelses Bidrag:

- 2) Til Udgivelsen af en Katalog over den danske Literatur ved Justitsraad Bruun. Bevilget den 17. Novbr. 1865 en Subskription af 50 Expl. mod en Sum af indtil 4000 Kr. Betalt 1086 Kr. 69 Øre. Rest 2913 Kr. 31 Øre. Heraf 600 —
- 3) Til Kleinschmidts Grønlandske Ordbog. Bevilget den 12. Juni 1868 en Understøttelse indtil 800 —

4) Til Udgivelse af Fr. Rostgaards Breve, ved Justitsraad Bruun. Bevilget d. 4. Juni 1869 600 Kr. Heraf er betalt til et Bind 230 Kr., til det andet (Udvalg af hans litterære Brevvexling) Rest	370 Kr.
5) Til Udgivelsen af J. C. Espersens bornholmske Ordbog, bevilget 17. Decbr. 1875	2400 —
6) Til Prof. V. Schmidt til Udgivelse af en Fortegnelse over Hieroglyfindskrifter, bevilget 17 Decbr. 1875	300 —
7) Til Prof. Lund, det ældste danske Skriftsprogs Ordforraad, bevilget 28. April 1876	500 —
	4970 Kr.

Selskabets Status:

Dets aarlige Indtægter	omtr.	12600 Kr.
Udgifter a) til dets Bestyrelse og Virksomhed:		
I	3700 Kr.	
II (efter Middelsum)	8000 —	
b) til Understøttelser Budg. Nr. 1.	300 —	
		12000 —
Til nye Understøttelser og tilfældige Udgifter haves		600 —

Det Hjelmsstjerne-Rosenkroneske Bidrag	5035 Kr.
Paa Budget Nr. 2—7	4970 —
Rest til Anvendelse	65 Kr.

foruden hvad der ikke maatte komme til Anvendelse i 1877 af de bevilgede Beløb.

Der foreligger Andragende om Understøttelse fra:

Cand. J. Stenstrup til Undersøgelse af Arkiver og Biblioteker i Frankrig med Hensyn til Normanernes Historie	600 Kr.
--	---------

Etatsr. Prof. Steenstrup meddelte nye Bidrag, navnlig Prof. A. Agassiz', til Kundskab om Flyndernes Udvikling (se nedenfor S. 174 ff.). Til denne Afhandling bevilgede Selskabet et Lithografi samt Træsnit.

Dernæst optoges efter Forslag af den mathematisk-naturvidenskabelige Klasse følgende tre udenlandske Medlemmer:

Allman, George James, forh. Professor i Naturhistorie i London,

Thomson, Sir William, Professor i Fysik i Glasgow — og

Tait, P. Guthrie, Professor i Fysik i Edinburgh.

De fra Bureauet for Norges geografiske Opmaaling modtagne to Rækker Kort, som ere anførte paa Boglisten for 1876, Nr. 379—382, bleve fremlagte, og da Universitets-Bibliotheket i den nærmeste Fremtid ingen Kortsamling kan anlægge, og ikke ser sig i Stand til at tilbyde en hensigtsmæssig Afbenyttelsesplads for de Kort det besidder, havde Præsidenten forespurgt sig i Generalstabens topografiske Afdeling, hvorvidt denne Samling maatte have Interesse for Afdelingen og i denne vilde kunne stilles til videnskabelig Afbenyttelse. I Henhold til Svaret fra Afdelingens Chef, Oberst Lorenzen, at man der baade vilde sætte Pris paa Samlingen og lade «den staa til Raadighed til videnskabelig Afbenyttelse paa samme Maade som den topografiske Afdelings øvrige Materiale», vedtog Selskabet, at overdrage den til Afdelingen som modtaget Gave til Selskabet fra Norge. De trykte Skrifter, der fulgte med til Oplysning, gik ligeledes til den topografiske Afdeling, ligesom det vil ske med den eventuelle Fortsættelse.

Tyge Brahes meteorologiske Dagbog anmeldtes færdig til at udgaa i disse Dage og fremlagdes i et Prøve-Omslag.

Sekretæren meddelte, at Selskabet d. 28de Novbr. d. A. havde mistet sit udenlandske Medlem K. E. von Baër, som var optagen den 22de Novbr. 1840.

I Mødet vare fremlagte de paa Boglisten under Nr. 511—554 anførte Skrifter.



Tilbageblik

paa Selskabets Virksomhed i Aaret 1876.

Ved Slutningen af Aarets 1875 talte Selskabet 43 indenlandske og 59 udenlandske Medlemmer. I Aarets Løb har Selskabet mistet 5 udenlandske Medlemmer, nemlig af den historisk-filosofiske Klasse Prof. A. D. Twesten, Medlem siden 21de December 1827, Prof. Chr. Lassen, Medlem siden 11te December 1846, og kgl. bøhmisk Hofhistoriograf Franz Palacky, der var bleven optagen til Medlem i Mødet den 7de April d. A.; af den matematisk-naturvidenskabelige Klasse Prof. C. G. Ehrenberg, Medlem siden 13de December 1839 og Akademiker K. E. v. Baër, Medlem siden 22de November 1840. Selskabet har derimod i Aarets Løb optaget følgende nye Medlemmer: som indenlandske Medlemmer af den historisk-filosofiske Klasse indvalgte i Mødet den 7de April Docent Dr. phil. C. W. Smith, Assistent ved Universitets-Bibliotheket V. Fausbøll, Rektor ved Reykjavik lærde Skole Jón Thorkelsson, og i Mødet den 8de December Professor Dr. ph. Rasmus Nielsen, Prof. Dr. ph. Sofus Heegaard, Universitets-Docent Dr. ph. Vilhelm Thomsen og Universitets-Docent Dr. ph. Ludvig Wimmer, samt som Medlem af den naturvidenskabelig-matematiske Klasse i Mødet den 7de April Assistent ved den kgl. Landbohøjskole Dr. med. Harald Krabbe. Selskabet har endvidere optaget som udenlandske Medlemmer af den

storisk-filosofiske Klasse i Mødet den 7de April: Medlemmerne af det franske Institut Léopold Delisle og Émile Littré og i Mødet den 8de December: Franz Miklosich, Professor i Wien. Ligeledes har det som udenlandske Medlemmer af den naturvidenskabelig-mathematiske Klasse i Mødet den 14de Januar optaget Charles Hermite, korresponderende Medlem af det franske Institut, Professor George Salmon i Dublin, Direktør Luigi Cremona i Rom, Prof. Dr. Gustav Kirchhoff i Berlin, Prof. Dr. Hermann Helmholtz i Berlin, Prof. Thomas H. Huxley i London, Prof. Dr. Carl Th. E. von Siebold i München og Prof. Dr. Carl Ludwig i Leipzig; i Mødet den 7de April Gehejmerraad O. W. Struve i Pulkowa, samt i Mødet den 22de December fhv. Prof. i Zoologien G. J. Allman i London, Sir William Thomson, Professor i Glasgow, og Prof. P. G. Tait i Edinburgh. Ved Slutningen af Aaret talte Selskabet altsaa 51 indenlandske og 70 udenlandske Medlemmer, af hvilke 26 indenlandske og 24 udenlandske henhørte til den historisk-filosofiske Klasse og 25 indenlandske og 46 udenlandske til den matematisk-naturvidenskabelige Klasse.

For tvende af Selskabets Embedsmænd, dets Sekretær og Kasserer, var den i Vedtægternes § 9 foreskrevne Funktions-tid udløben i April Maaned. Til disse Poster gjenvalgtes i Mødet den 28de April Etatsraad, Prof. Steenstrup og Prof. Reinhardt. I Stedet for Etatsraad, Dr. ph. L. Müller, der efter Tur udtraadte af Kassekommissionen og som havde frabedt sig Gjenvalg, valgte Selskabet til Medlem af Kommissionen Prof. Dr. E. Holm.

Ordbogskommissionen har, af Mangel paa Medarbejdere, ikke set sig i Stand til at fremme Udgivelsen af de tilbagestaaende Bogstaver.

Regesta-Kommissionen har fremdeles samlet Materiale til et Supplementbind; Prof. Thorsen gav i Mødet den 27de Oktober en nærmere Oversigt over dette Arbejdes Fremgang.

Den Meteorologiske Komité, som iøvrigt tidligere har afsluttet sin Virksomhed, har i dette Aar udgivet «Tyge Brahes meteorologiske Dagbog, holdt paa Uraniborg for Aarene 1582—1597.»

Selskabet har i Aaret — foruden to overordentlige Møder i Anledning af Carlsbergfondet — holdt 14 Møder, i hvilke 14 videnskabelige Meddelelser ere blevne givne, 4 af Medlemmer af den historisk-filosofiske Klasse, 10 af Medlemmer af den matematisk-naturvidenskabelige. 4 af disse ere i deres Helhed blevne optagne i Oversigterne for dette Aar og 1 i Uddrag; med Undtagelse af nogle, der ere bestemte til Optagelse andetsteds, ville de øvrige blive trykte enten i Selskabets Skrifter, eller i dets Oversigter.

Af Selskabets Skrifter ere i Aaret 1876 udkomne 5te Rækkes matematisk-naturvidenskabelig Afdeling Bd. XI. 2 (Hannover: Øjets Nethinde); XI. 3 (Colding: Om Strømninger i Havet, fremkaldte ved Vindens Kraft) og Bd. XII. 2. (Lütken: Velhas-Flodens Fiske).

Af Værker, til hvis Udgivelse Selskabet har ydet sin Understøttelse, er der udkommet:

7de Hæfte af Roeskilde Domkirkes Beskrivelse ved Foreningen til Udgivelsen af danske Mindesmærker.

Iøvrigt har Selskabet tilstaaet følgende Understøttelser: 200 Kroner til Adjunkt Karl Schmidt i Odense til Anskaffelse af et Polarisations-Instrument; 500 Kr. til Adj. Grønlund i København til en botanisk Undersøgelses-Rejse paa Island; 500 Kr. til Selskabets Medlem Prof. Rektor Dr. Lund i Aarhus til «Det ældste danske Skriftsprogs Ordforraad».

Da Kaptajn Brygger J. C. Jacobsen den 25de Sept. d. A. stiftede det til videnskabelige FormaaIs Fremme bestemte «Carlsbergfond», anmodede han samtidig Videnskabernes Selskab om at tage Stiftelsen i sin Varetægt, ved at Selskabet af sin egen Midte valgte Fondets Direktion. I sit Møde den 29de Sept. be-

sluttede Selskabet at modtage det hæderfulde Hverv, som Stifteren havde villet tillægge det, og det har i senere Møder valgt til Medlemmer af Direktionen Konferensraad Madvig, Prof. E. Holm, Prof. Barfoed, Etatsraad Steenstrup og Prof. Panum. De tre sidstnævnte udgjøre Laboratoriebestyrelsen. Som tilforordnede Medlemmer af denne ere efter Selskabets Opfordring indtraadte Kapt. Brygger Jacobsen og hans Medbestyrer Brygger Kogsbølle. Direktionen har valgt Konferensraad Madvig til sin Formand, og Prof. E. Holm har midlertidig overtaget Sekretærforretningerne.



Oversigt over Resultaterne af nogle Undersøgelser over de ved Vindens Kraft fremkaldte Strømninger i Havet.

Af Prof. A. Colding.

(Meddelt i Selskabets Møde d. 11te Februar 1876.)

Forud for den ovennævnte Undersøgelse ville vi betragte et meget simpelt Strømningsforhold, og da navnlig antage, at der hen over den plane Bund af en Ledning, hvis Fald i Strømmens Retning er $\frac{h}{l}$, strømmer en Vandmasse frem i Retning af Faldet. Lad os derhos forudsætte, at Vandmassen alene paavirkes af Tyngdekraften og af Ledningsmodstanden, at Strømmens Brede er saa stor, at Ledningens Sideflader ingen Indflydelse udøve paa de betragtede Dele af Strømmen, samt at dens Vandspeil flyder parallelt med Bundplanen. I saadant Tilfælde er Vanddybden H constant, ligesom Strømhastigheden for ethvert Element er constant. For denne Strøm, hvis Vandspeil antages at bevæge sig fuldkommen frit og hvis Dybde antages at være tilstrækkelig stor, gælder Formlerne (52) i min tidligere Afhandling om Strømningsforholdene i almindelige Ledninger og i Havet, hvilke Formler under de gjorte Forudsætninger kunne skrives:

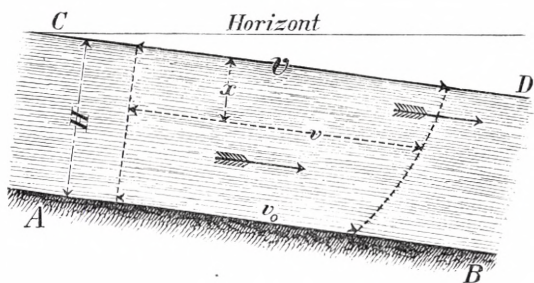
$$v = \mathcal{V} - 4,8 \sqrt{m} \cdot v_0 \cdot \left(\frac{x}{H}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ og } g \frac{h}{l} = \frac{m v_0^2}{H}, \dots \dots (1)$$

hvor \mathcal{V} betegner Vandstrømmens største Hastighed, Vandspeilhastigheden, medens v_0 betegner Bundhastigheden og v Vandets

Hastighed i Afstanden x fra det frie Vandspeil; m er Bundens Modstandscoefficient og $(m \cdot v_0^2)$ fremstiller den Modstand, som Bunden udøver imod Vandets Bevægelse, for Eenhed af Overflade. Ved at multiplicere den sidste af Ligningerne (1) med $(4,8)^2$ bemærkes let at den første Ligning kan skrives:

$$v = \mathcal{V} - 26,833 \cdot \left(\frac{x}{H}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{h}{l}} H \dots \dots (2)$$

Fig. 1.



og derefter, at Strømningsforholdene i den betragtede Vandstrøm kunne fremstilles ved den hostaaende Figur 1, hvori AB er Ledningens Bund og CD Strømmens Vandspeil.

Tænke vi os dernæst Strømmens Overflade begrændset af en med Ledningens Bund parallel Plan eller Dækflade, saa er det indlysende, at hvis denne Dækflade bevæger sig frem i Strømmens Retning med samme Hastighed \mathcal{V} som Vandspeilet, med hvilket den er i Berøring, saa vil Dækslet ingen Indflydelse udøve paa Strømførholdene i Ledningen, da det ingen Modstand udøver paa Vanddelenes Bevægelse, eftersom den relative Hastighed mellem Dækslet og Vandet, der berører samme, er Nul.

Har Dækplanen derimod en anden Hastighed end Vanddelene af Strømmens Overflade, saa er den relative Hastighed mellem begge ikke Nul, og i saadant Tilfælde bliver selvfølgelig Vandbevægelsen i Ledningen paavirket af Dækslet med en Kraft, som afhænger af den relative Hastighed, hvormed Dækfladen bevæger sig over Strømmens Overflade. Strømmens Overflade-

hastighed bliver da forskjellig fra den fritløbende Strøms Hastighed \mathcal{V} , og naar vi almindeligt ved v_1 betegne Hastigheden af Vandet ved Dækslet, samt ved V betegne Dækfladens Hastighed, saa kan den relative Hastighed mellem Dækslet og Strømmens Overflade, uden Hensyn til Fortegnet, fremstilles ved $(v_1 - V)$. Betegne vi dernæst Dækfladens Modstandscoefficient ved m_1 , saa er det klart, at der mellem Dækslet og Vanddelene opstaaer en Modstandskraft, som kan udtrykkes ved $m_1(v_1 - V)^2$, ganske paa samme Maade som Modstandskraften ved Ledningens Bund kan fremstilles ved $m \cdot v_0^2$.

Naar Dækslets Modstandskraft er Nul maa man have $V = v_1$; da er som vi have seet Strømmens Overfladehastighed $v_1 = \mathcal{V}$.

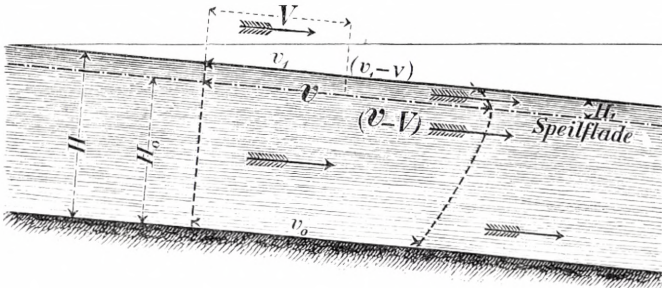
Er V derimod positiv og mindre end den frie Strøms Overfladehastighed, saa lider Strømmen en Modstand, som er udtrykt ved $m_1(v_1 - V)^2$, og denne Modstand fremkalder naturligviis ganske tilsvarende Forhold ved Strømmens Overflade, som de der fremkaldes ved Ledningens Bund af den derværende Reaction. Som Følge heraf bliver hele Vandstrømmen, hvis Dybde er H , deelt i to selvstændige Strømme, nemlig en øvre Strøm, hvis Dybde vi ville kalde H_1 og en nedre Strøm, hvis Dybde vi ville betegne med H_0 , saaledes, at $H_0 + H_1 = H$. Af disse to Strømme paavirkes Overstrømmen alene af Dækfladens Modstand, Understrømmen alene af Bundfladens Modstand, saaledes som jeg tidligere har viist, og enhver af disse to Strømme bevæger sig paa sin Flade som en fri og ubedækket Strøm, der har sit frie Vandspeil i Skillefladen mellem begge Strømme. Denne fælleds Vandspeilflade, hvori Strømhastigheden er større end for noget andet Punkt af de to Strømme, kalder jeg Strømmenes Speilflade, og Hastigheden i denne Flade, hvis Beliggenhed varierer med V , betegner jeg ved \mathcal{V} .

Naar $V = v_1$, saa er Dækslets Modstand Nul, altsaa Overstrømmens Dybde $H_1 = 0$ og $v_1 = \mathcal{V}$; i dette Tilfælde falder Speilfladen altsaa ved Overfladen og danner Vandspeilet, hvori Hastigheden er et Maximum, som antydet i Fig. 1.

Formindskes V , saa forøges Modstanden ved Overfladen og

Maximumshastigheden \mathcal{V} sænker sig under Overfladen en tilsvarende Dybe H_1 , see Fig. 2. Naar altsaa V aftager fra \mathcal{V} til

Fig. 2.



Nul, saa aftager Overfladehastigheden, medens Dybden H_1 tiltager, og tænkes V derefter yderligere at aftage, eller hvad der er det samme, tænkes V at voxe negativt, saa kan Vandets Overfladehastighed v_1 derved bringes til at aftage indtil Nul, see Fig. 3 og 4; for endnu større negative Værdier af V

Fig. 3.

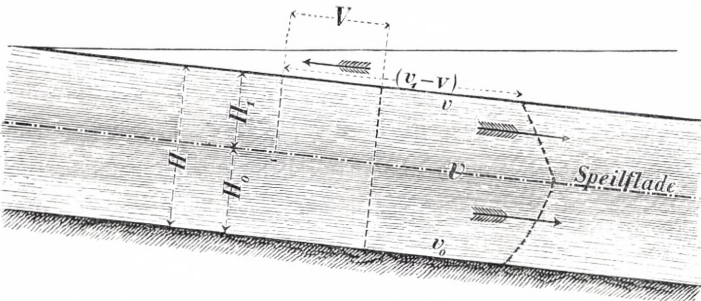
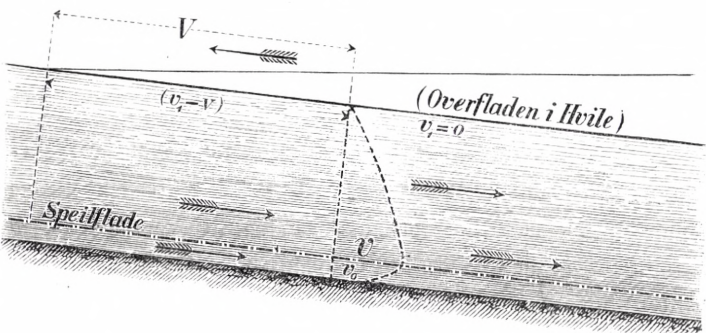
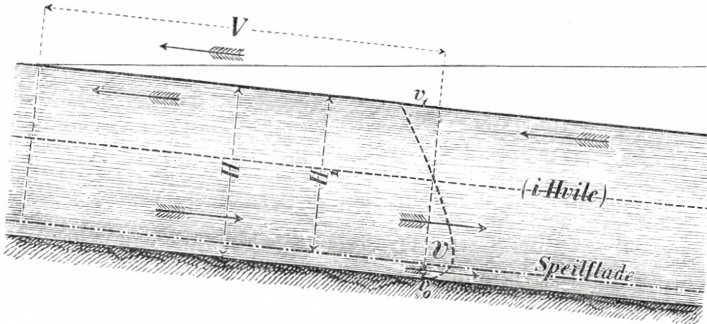


Fig. 4.



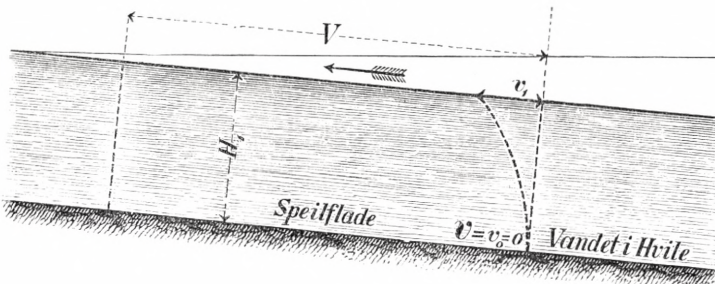
gaaer endelig v_1 over til at voxe negativt. Overstrømmens Dybde H_1 vedbliver imidlertid at voxe og da denne Strøms Hastighed er positiv i Dybden H_1 men negativ ved Dækslet, saa er det klart, at der findes et Sted i Strømmen, hvor Hastigheden er Nul, see Fig. 5. Afstanden fra Dækslet til dette Punkt voxe med V , og

Fig. 5.



jeg skal derved blot bemærke, at naar denne Afstand er $= 0,45 \cdot H$ saa er Vandføringen af hele Strømmen $= 0$. Samtidigt med at Overstrømmens Dybde H_1 tiltager, aftager naturligviis Understrømmens Dybde $H_0 = H - H_1$, og for en vis Værdi af V forsvinder aabenbart Understrømmen aldeles, og navnlig i det Øieblik da den Modstand, som Dækslet under sin Bevægelse i modsat Retning af Vandspeilsfaldet udøver mod Overfladen af Vandmassen, bliver saa stor, at den drivende Kraft, som derfra meddeles Vandet, er ligestor med den drivende Kraft, som fremkaldes ved Tyngdens Virkning paa den hele Vandmasse. Naar dette indtræder, river Dækslet hele Vandmassen med sig, medens denne løber frem paa Dækslet saaledes at Vanddelene ved Bunden netop forblive i Hvile, som antydet paa Fig. 6.

Fig. 6.



I det Øieblik hvor Understrømmen forsvinder, falder aabenbart Maximumhastigheden \mathcal{V} i Speilfladen sammen med Bundhastigheden v_0 , og man har $\mathcal{V} = v_0 = 0$. Den hele Vandmasse kan da betragtes som en Strøm, der løber paa den med Hastigheden V bevægede Dækflade, i Retning af Ledningens Fald, og hvis frie Vandspeil befinder sig ved Ledningens Bund. Da Vandets virkelige Hastighed ved Dækfladen er v_1 og ved Bundfladen er Nul, saa er Vandets relative Hastighed med Hensyn til Dækfladen foroven $= \div (V - v_1)$ og forneden $= -V$.

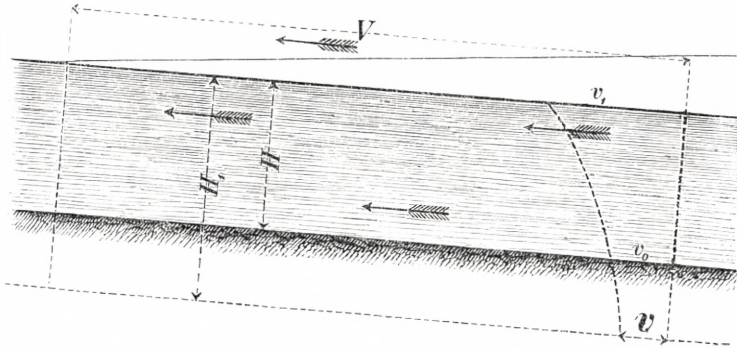
Den hele her beskrevne Gruppe af Strømningsforhold, fra det Tilfælde, hvor Vandstrømmen helt og holdent bevæger sig paa Ledningens Bundflade og dens Overflade er fri, til det Tilfælde, hvor Vandmassen udelukkende bevæger sig paa Dækfladen, medens Strømmens Vandspeil befinder sig ved Ledningens Bund, sammenfatter jeg under Betegnelsen 1ste Classe af Strømningsforhold.

Til at danne Strømningsforhold henhørende til denne Classe udfordres altsaa, at Dækslet skal bevæge sig med en Hastighed V , der ligger mellem Grændser, som afhænge af Ledningens Dybde og Fald, og hvoraf den høiere (positive) Grændse er $V = \mathcal{V}$, og den lavere (negative) Grændse har en saadan Størrelse, at Strømmens Bundhastighed netop er Nul.

Stiger Dækfladens Hastighed V i negativ Retning ud over den nævnte lavere Grændse, ved hvilken Bundhastigheden er Nul, imod $\div \infty$, saa fremkommer der en ny Gruppe af Vandbevægelser, der passende kan benævnes 2den Classe af Strømningsforhold. Det vil nemlig være klart, at naar Dækslets Hastighed i negativ Retning bliver større end den, ved hvilken Vanddelene ved Bunden af Ledningen ere i Hvile, saa vil Dækslets Bevægelse medføre en forøget Reaction mod Strømmens Overflade, og Følgen deraf vil være, at ogsaa de nederste Dele af Vandmassen rives med af Dækslet i negativ Retning hen over Ledningens Bund. Bundhastigheden, som vi kalde v_0 , bliver altsaa negativ og der opstaaer en Reaction ved Bunden, udtrykt ved $m \cdot v^2$,

som vil antage en saadan Størrelse, at Strømhastigheden bliver constant for den givne Hastighed V af Dækslet. — Vandbevægelsen vil i dette Tilfælde være overensstemmende med den, som finder Sted i den øverste Deel af en dybere Strøm, der løber paa Dækfladen, saaledes som det er antydet i den hostaaende Fig. 7.

Fig 7.

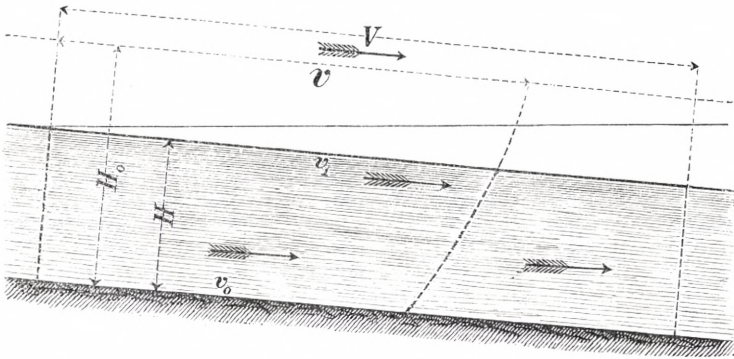


Tænke vi os paa den anden Side, at Dækslets Hastighed V voxer positivt (i Retning af Ledningens Fald) ud over den høiere Grændse for den 1ste Classe af Strømmen, altsaa fra ∞ til $+$, saa opstaaer hvad jeg kalder 3die Classe af Strømforhold. Tilfælde af denne Art fremkomme altsaa, naar Dækslet bevæger sig i positiv Retning med en Hastighed V , der er større end den Hastighed, hvormed Overfladen af den betragtede Vandmasse vilde bevæge sig, naar Overfladen var fri og Strømmen foruden af Tyngdekraften kun paavirkedes af Ledningens Reaction. I dette Tilfælde vil Vandbevægelsen være overensstemmende med den som finder Sted i den nedre Deel af en dybere Strøm, som løber paa Bundfladen, saaledes som det er antydet i Fig. 8.

Disse tre Classer af Strømningsforhold omfatte som man vil see alle de permanente Strømningsforhold, som kunne fremtræde i en Vandstrøm, som har constant Dybde og Fald; men det sees tillige let, at om Vandspeilet ikke fuldkommen er parallelt med Bundnen, saa vil Strømmens Tværnsnitsareal for en

Brede = 1 kun variere forholdsviis lidt, naar Strømdybden H er stor. Men naar Strømprøfilet kun varierer lidt, saa varierer

Fig. 8.



ogsaa Strømhastigheden kun lidt, og kan denne betragtes som constant langs ad Strømmen, saa ere foranstaaende Formler gjældende for Strømmen.

De almindelige Love, som paa den antydede Maade lade sig udlede for Vandets Bevægelse i Strømme, der staae under Indflydelse af en bevægelig Dækflade, har det ligget nær for mig at anvende paa de Strømningsforhold i Havet, som fremkaldes ved Vindens Kraft, under Luftens Bevægelse hen over Vandspeilet. Det nærværende Arbeide har nemlig sin Oprindelse derfra, at det danner et Slags Forarbeide til en omfattende Undersøgelse over Stormen og Stormfloden den 13de November 1872, som jeg har stillet mig til Opgave at gennemføre saa vidt muligt, for ved Hjælp af de fra mangfoldige Steder indhentede Kjendsgjæringer om dette i Storartethed og stærk udpræget Character næsten enestaaende Naturphænomen muligviis at kunne bringe noget Lys ud over denne Art af Naturbegivenheder, hvorefter man hidindtil næsten ingen Kundskab har høvt, og imod hvilke man derfor ogsaa kun høist ufuldkomment har kunnet væge sig; thi indtil nu kan man vel næppe siges at være paa det Rene med, hvad der er slige Phænomeneres Aarsag, og endnu mindre har man været istand

til at danne sig en tydelig Forestilling om Størrelsen af de Kræfter, som Naturen formaaer at sætte i Bevægelse under en Stormflod, som den af 13de Novbr. 1872, der hærjede en stor Deel af Østersøens Kyster.

Men idet vi betragte Luften som den bevægelige Dækflade, der med Vindens Hastighed glider hen over Vandspeilet, saa bliver det nødvendigt at undersøge, hvilke Værdier vi skulle tillægge de to Modstandscoefficienter m og m_1 , der henholdsvis svare til Havbundens og til Luftens Modstand.

Med Hensyn til Havbundens Modstandscoefficient, da har jeg tidligere i min Afhandling om Strømforholdene, i Henhold til nogle ældre, af Bruning udførte Forsøg over Strømhastigheden i Rhinen m. fl. Strømme, antaget at Modstandscoefficienten for Havstrømme maatte sættes $m = 0,025$, fordi denne Værdi omtrent svarede til den største Ledningsmodstand, som Bruning fandt, og som jeg antog svarede til Bevægelsen af en Vandstrøm, som gaaer hen over stillestaaende Vandmasser, der ved Ujevnheder i Bunden vare forhindrede fra at følge Strømmens Løb. Senere har jeg imidlertid faaet en ikke ringe Tvivl om det er rigtigt at betragte Havstrømmenes Modstandscoefficient som Grænsen for den i de nævnte Floder fremkomne Modstandscoefficient, der maaske sandsynligere hidrørte fra de særlige Modstande, Strømmens Brydninger mod fremstaaende Klippemasser etc. foraarsagede. Denne Indvending imod min tidligere Antagelse har navnlig fundet en Bestyrkelse deri, at det er en Kjendsgjerning, at naar en Vandstrøm bevæger sig igjennem et af vore almindelige Vandløb, hvis Bund er jevn og bestaaer af Steen, Gruus, Sand o. s. v., som er fuldstændigt gjenemtrængt af stillestaaende Vand, saa vil denne derved fremkalde en langt mindre Modstand, end den som Rhinen frembød, hvilket ogsaa fremgaaer af nogle Forsøg, som Bruning har udført i en regelmæssig Canal, hvori Modstandscoefficienten var betydeligt mindre, og meget nærmede sig til den Værdi, som svarer til jevne og gode Ledninger af Muurværk, Jern o. s. v.

Min første Tvivl om Rigtigheden af at fastholde Modstandscoefficienten $m = 0,025$, skriver sig imidlertid derfra, at jeg ved at indføre denne Værdi i mine Formler kom til et Resultat angaaende Luftmodstanden, som var i Strid med en almindelig Lov om Fluiders Ledningsmodstand, som jeg har fremstillet i Videnskabernes Selskabs Oversigter for Aaret 1865, og som jeg senere paa mange Maader har fundet bekræftet, som en almindeligt gjældende Naturlov. Ifølge denne Lov, som siger, at Ledningsmodstanden for forskjellige Fluider, som bringes til at gjennestrømme en given Ledning med samme Hastighed, forholder sig som Fluidernes Tæthed, — kan det nemlig paaregnes, at naar en Vandstrøm ved at bevæge sig langs ad en stillestaaende Vandflade lider en Modstand, som kan fremstilles ved: $m.v^2$, saa vil samme Strøm, ved at bevæge sig langs ad en stillestaaende Luftflade med Hastigheden v , lide en Modstand, som kan fremstilles ved: $m.\rho.v^2$, naar ρ betegner Luftens Tæthed i Forhold til Vand.

Bestemme vi efter denne Lov Luftens Modstandscoefficient m_1 , idet vi foreløbigt lade Havbundens Modstandscoefficient m henstaae som ubekjendt, da sætter Stormen og Høivandet den 13de November 1872 os istand til paa den meest storartede Maade at bestemme Havbundens Modstandscoefficient m .

Bemærke vi nemlig at Luftens Tæthed er 0,0013 af Vandets, saa følger deraf, at $m_1 = 0,0013.m$ og at $\sqrt{m_1} = 0,036.\sqrt{m}$; indføre vi derefter disse Værdier for m_1 og for $\sqrt{m_1}$ i de almindelige Formler, saa kunne vi til Bestemmelsen af Modstandscoefficienten m noget nær benytte hvilke Observationer over Stormen og Høivandet af 13de Novbr. 1872 vi ville; vi kunne saaledes benytte de observerede Forhold ved et Hav af ringe Dybde f. Ex. «Frische Haff» eller ved et Hav af betydelig Dybde f. Ex. Østersøen mellem Sverrig og Rusland; vi kunne vælge Strækninger, hvor Strømmen løber med Vinden eller hvor Strømmen løber imod Vinden; vi ville for dem alle temmelig nær finde samme Værdi for m , nemlig $m = 0,0037$ og $\sqrt{m} = 0,061$. Sammenligne vi nu til Slutning disse Værdier

for m og \sqrt{m} med de Værdier for Modstandscoefficienten som svare til Brunings Observationer i den pannerdenske Canal, saa viser det sig, at de efter hans Undersøgelser bestemte Værdier af m netop dreie sig omkring den her fundne Værdi. Sammenligne vi fremdeles den ved Hjælp af Stormen og Høivandet bestemte Modstandscoefficient med Modstandscoefficienten for Vandets Bevægelse i nye og gode Jernledninger, efter de af den berømte franske Ingenieur Darcy's udførte Forsøg, saa finde vi at for alle de nye Ledninger, som af Darcy ere blevne grundigt undersøgte, har Modstandscoefficienten viist sig at være $m = 0,0036$, hvilket Tal ogsaa findes at svare til Ledningsmodstanden i vel udførte Muurværksledninger. Det staaer saaledes fast, at den udviklede Theori bekræftes af Erfaring, og det er desuden vel værd at lægge Mærke til, at de heromhandlede Formler ikke blot ere tjenlige til Bestemmelsen af Havstrømmenes Vandføring, men at de have en saadan almindelig Gyldighed, at de tillige omfatte de sædvanlige Formler, som gjælde for Vandets Bevægelse i almindelige Ledninger, og til Exempel kunne benyttes til Bestemmelsen af Vandets Løb i en almindelig Cloak.

En Note til et vanskeligt Punkt i Laplaces «Théorie analytique
des Probabilités». Paris 1814.

Af

Camillo Tychsen.

I det ovenfor citerede Værk pag. 225 findes en Spilleropgave, som oversat paa dansk lyder saaledes:

To Spillere A og B , af hvilke den første ejer a Jetons, den anden b Jetons, have de respektive Sandsynligheder p og q for at vinde et enkelt Spil. Den, som taber, betaler 1 Jeton til sin Modstander, og Partiet ophører, naar enten A eller B har tabt alle sine Jetons.

Der spørges om Sandsynligheden for, at den ene af Spillerne t. Ex. A vil vinde Partiet før eller ved det n te Spil.

Denne Opgave har Laplace behandlet analytisk ved Hjælp af genererende Funktioner, og efter en Udvikling, som i sine Enkeltheder er i høj Grad vanskelig at gennemtrænge, udtrykkes Problemets almindelige Løsning ved et Resultat, som i nærværende Afhandling, er anført under Mærket (30).

Af Sandsynlighedsregningens Historie fremgaaer imidlertid, at dette Problem allerede har været undersøgt af Montmort, Nicolai Bernoulli og de Moivre. Senere for omtrent hundrede Aar tilbage i Tiden har Lagrange i en Afhandling om recurrente

Rækker, som findes i Berliner Academiets Memoirer for Aaret 1775, givet to høist forskjellige Løsninger af et Spillerproblem, om hvilket Forfatteren i en vedføiet Slutningsanmærkning siger :

«Le Problem précédent revient à celui qui concerne la durée des parties que l'on joue en rabattant, et dont Mrs. Montmort, Nic. Bernouilli et de Moivre se sont occupés.»

Den sidste af disse to Løsninger er især ret mærkelig derved, at den gennem en forholdsvis let tilgængelig Udvikling leder til et Resultat, der i Formen har nogen Lighed med det ovenfor omtalte, som Laplace har fundet ved Anvendelsen af genererende Funktioner.

Denne Omstændighed har bragt mig til nærmere at undersøge det omhandlede Problem hos Laplace, og da jeg ved at integrere Problemets Differensligning efter Lagranges Methode er bleven ledet til nøiagtig det samme Resultat som Laplace, har jeg troet, at den efterfølgende Meddelelse, som indeholder Hovedtrækkene af denne Undersøgelse, maatte egne sig til Optagelse i Oversigterne over det kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger som en Note til et vanskeligt Punkt i Laplaces berømte Værk «Théorie analytique des Probabilités.»

Endvidere skal jeg endnu kun bemærke, at jeg gennem en dobbelt Løsning af et specielt Tilfælde af det ovenfor omtalte Problem er bleven ledet til Værdien af et bestemt Integral. Denne Undersøgelse har jeg tilføiet i Slutningen af Noten.

Betegnes Sandsynligheden for, at A vil vinde Partiet, naar han paa et vist Stadium i Spillet ejer x Jetons og endnu har y Spil tilbage for at naae op til de n Spil, ved $u_{x,y}$, saa vil denne Sandsynlighed efter et paafølgende Spil forandres enten til

$$u_{x+1,y-1} \quad \text{eller} \quad u_{x-1,y-1}$$

eftersom A vinder eller taber dette enkelte Spil, og da p og q ere de resp. Sandsynligheder for disse to Begivenheder, har

man efter et bekjendt Princip i Sandsynlighedsregningen, Differensligningen

$$u_{x,y} = p u_{x+1,y-1} + q u_{x-1,y-1} \quad (1)$$

til Bestemmelsen af den søgte Sandsynlighed.

Efter Opgavens Beskaffenhed maa man endvidere have

$$\begin{aligned} u_{0,y} &= 0, & u_{a+b,y} &= 1 \\ \text{og} & & & \\ u_{x,0} &= 0 \text{ for } x = 0, 1, 2, 3 \dots (a+b-1). \end{aligned} \quad (2)$$

Problemets Løsning er saaledes reduceret til at integrere Differensligningen (1) under Betingelserne (2).

Antages nu, at der til (1) svarer et partikulært Integral af Formen

$$u_{x,y} = \alpha^x \beta^y, \quad (3)$$

hvor α og β ere to ubekjendte Konstanter, som ifølge (1) alene er underkastet Betingelsen

$$\alpha \beta = p \alpha^2 + q, \quad (4)$$

og tænkes dernæst α^x udviklet i en endelig Række af Formen

$$\alpha^x = X_0 + X_1 \beta + X_2 \beta^2 + \dots + X_x \beta^x + (X_0' + X_1' \beta + X_2' \beta^2 + \dots + X_{x-1}' \beta^{x-1}) \alpha, \quad (5)$$

hvor $X_0, X_1, X_2 \dots X_x, X_0', X_1', X_2' \dots X_{x-1}'$ ere rationale Funktioner af x, p og q , saa faaer man ved at multiplicere denne Række med β^y

$$u_{x,y} = X_0 u_{0,y} + X_1 u_{0,y+1} + X_2 u_{0,y+2} + \dots + X_x u_{0,y+x} + X_0' u_{1,y} + X_1' u_{1,y+1} + \dots + X_{x-1}' u_{1,y+x-1} \quad (6)$$

Af (4) erhoides

$$\alpha = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4pq}}{2p} = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases} \quad (7)$$

Sættes dernæst i (5)

$$\begin{aligned} P_x &= X_0 + X_1 \beta + X_2 \beta^2 + \dots + X_x \beta^x \\ \text{og} & \\ Q_x &= X_0' + X_1' \beta + X_2' \beta^2 + \dots + X_{x-1}' \beta^{x-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

har man ifølge (7) og (5) Ligningerne

$$\begin{aligned} \alpha_1^x &= P_x + Q_x \alpha_1, \\ \alpha_2^x &= P_x + Q_x \alpha_2, \end{aligned}$$

som give

$$Q = \frac{\alpha_1^x - \alpha_2^x}{\alpha_1 - \alpha_2} = p \frac{(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4pq})^x - (\beta - \sqrt{\beta^2 - 4pq})^x}{2^x p^x \sqrt{\beta^2 - 4pq}}. \quad (9)$$

Gaae vi tilbage til (6), see vi, at den første Integrationsbetingelse (2) forandrer denne Ligning til

$$u_{x,y} = X_0' u_{1,y} + X_1' u_{1,y+1} + X_2' u_{1,y+2} + \dots + X_{x-1}' u_{1,y+x-1},$$

og sættes heri

$$u_{1,y} = \frac{1}{K} - v_y,$$

hvor K er en Konstant, der nærmere maa bestemmes, faaer man

$$u_{x,y} = \frac{X_0' + X_1' + X_2' + \dots + X_{x-1}'}{K} - X_0' v_y - X_1' v_{y+1} - X_2' v_{y+2} - \dots - X_{x-1}' v_{y+x-1}; \quad (10)$$

men ifølge den anden Integrationsbetingelse (2) forandres (10) til

$$i = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{a+b-1}}{K} - A_0 v_y - A_1 v_{y+1} - A_2 v_{y+2} - A_3 v_{y+3} - \dots - A_{a+b-1} v_{y+a+b-1}, \quad (11)$$

idet A er benyttet som Betegnelse for X' , naar heri x forandres til $a + b$, saa at man ved at bestemme Konstanten K saaledes, at

$$K = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{a+b-1}, \quad (12)$$

faaer Differensligningen

$$A_0 v_y + A_1 v_{y+1} + A_2 v_{y+2} + \dots + A_{a+b-1} v_{y+a+b-1} = 0 \quad (13)$$

til Bestemmelsen af v_y .

Sættes paa sædvanlig Maade i (13)

$$v_y = \beta^y,$$

hvor β er en ubekjendt Konstant, der nærmere maa bestemmes, faaer man

$$A_0 + A_1 \beta + A_2 \beta^2 + \dots + A_{a+b-1} \beta^{a+b-1} = 0. \quad (14)$$

Betegnes Rødderne i denne algebraiske Ligning ved

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{a+b-1}, \quad (15)$$

og erindres tillige, at $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{a+b-1}$ ere Værdierne af $X_0', X_1', X_2, \dots, X_{x-1}'$, naar x forandres til $a + b$, saa seer man let, at Ligning (14) er ensbetydende med den Ligning, som fremkommer af den anden Formel (8), naar man heri forandrer

x til $a + b$ og derefter sætter høire Side lig med Nul, hvoraf følger, at man har Ligningen

$$Q_{a+b} = 0 \quad (16)$$

til Bestemmelsen af Rødderne (15).

Naar man dernæst i (9) sætter

$$\beta = 2\sqrt{pq} \cos \theta, \quad (17)$$

faaes

$$Q_x = \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^{x-1} \frac{\sin x \theta}{\sin \theta} \quad (18)$$

og (16) forandres derved til

$$\frac{\sin (a+b) \theta}{\sin \theta} = 0; \quad (19)$$

men heraf findes

$$\theta = \frac{(r+1)\pi}{a+b}$$

for

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots (a+b-2),$$

og man har altsaa ifølge (17) ganske i Almindelighed

$$\beta_{r+1} = 2\sqrt{pq} \cos \frac{(r+1)\pi}{a+b}. \quad (20)$$

Da fremdeles det fuldstændige Integral af Differensligningen (13) kan fremstilles ved

$$v_y = C_1 \beta_1^y + C_2 \beta_2^y + C_3 \beta_3^y + \dots + C_{a+b-1} \beta_{a+b-1}^y,$$

hvor $C_1, C_2, C_3, \dots C_{a+b-1}$ ere arbitrære Konstanter, kan (10) omskrives til

$$u_{x,y} = \frac{X_0' + X_1' + X_2' + \dots + X_{x-1}'}{K} - \sum_0^{a+b-2} C_{r+1} Q_x^{(r+1)} \beta_{r+1}^y, \quad (21)$$

idet Σ tages med Hensyn til r og

$$Q_x^{(r+1)} = \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^{x-1} \frac{\sin \frac{(r+1)x\pi}{a+b}}{\sin \frac{(r+1)\pi}{a+b}} \quad (22)$$

Ifølge den anden Ligning (8) er

$$X_0' + X_1' + X_2' + \dots + X_{x-1}'$$

Værdien af Q_x for $\beta = 1$. Denne Værdi for β giver ifølge (7)

$$\alpha_1 = \frac{q}{p} \text{ og } \alpha_2 = 1,$$

og da fremdeles K er Værdien af Q_{a+b} for $\beta = 1$, kan (21) omdannes til

$$u_{x,y} = \frac{p^x - q^x}{p^x} \cdot \frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}} - 2^y (V\overline{pq})^y \left(V\overline{\frac{q}{p}} \right)^{x-1} \sum_0^{a+b-2} C_{r+1} \frac{\sin \frac{(r+1)x\pi}{a+b} \cos^y \frac{(r+1)\pi}{a+b}}{\sin \frac{(r+1)\pi}{a+b}} \quad (23)$$

Anvendes nu den tredie Integrationsbetingelse (2) til Bestemmelsen af C_{r+1} , og sættes i denne Hensigt for Kortheds Skyld

$$\frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}} = \eta \text{ og } V\overline{\frac{p}{q}} \cdot \frac{C_{r+1}}{\eta \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b}} = \xi_{r+1}, \quad (24)$$

faaer man af (23)

$$\xi_1 \sin \frac{x\pi}{a+b} + \xi_2 \sin \frac{2x\pi}{a+b} + \xi_3 \sin \frac{3x\pi}{a+b} + \dots + \xi_{r+1} \sin \frac{(r+1)x\pi}{a+b} + \dots + \xi_{a+b-1} \sin \frac{(a+b-1)x\pi}{a+b} = \left(1 - \left(\frac{q}{p} \right)^x \right) \left(V\overline{\frac{p}{q}} \right)^x,$$

som for

$$x = 0, 1, 2, 3 \dots (a+b-1)$$

giver følgende System af Ligninger

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \sin \frac{\pi}{a+b} + \xi_2 \sin \frac{2\pi}{a+b} + \dots + \xi_{a+b-1} \sin \frac{(a+b-1)\pi}{a+b} \\ = V\overline{\frac{p}{q}} - V\overline{\frac{q}{p}} \\ \xi_1 \sin \frac{2\pi}{a+b} + \xi_2 \sin \frac{4\pi}{a+b} + \dots + \xi_{a+b-1} \sin \frac{2(a+b-1)\pi}{a+b} \\ = \left(V\overline{\frac{p}{q}} \right)^2 - \left(V\overline{\frac{q}{p}} \right)^2 \\ \dots \\ \dots \\ \xi_1 \sin \frac{(a+b-1)\pi}{a+b} + \xi_2 \sin \frac{2(a+b-1)\pi}{a+b} + \dots + \xi_{a+b-1} \sin \frac{(a+b-1)(a+b-1)\pi}{a+b} \\ = \left(V\overline{\frac{p}{q}} \right)^{a+b-1} - \left(V\overline{\frac{q}{p}} \right)^{a+b-1} \end{aligned} \right\} (25)$$

til Bestemmelsen af Størrelserne

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_{a+b-1}$$

Efter en Methode af Lagrange, som er optaget i 2den Udgave af Todhunters Integral Calculus p. 266, kan man af Ligningerne (25) uden Vanskelighed finde

$$\xi_{r+1} = \frac{2}{a+b} \left\{ \begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b} + \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^2 \sin \frac{2(r+1)\pi}{a+b} + \dots \right. \\ & \quad \left. + \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{a+b-1} \sin \frac{(r+1)(a+b-1)\pi}{a+b} \right) \\ & - \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b} + \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2 \sin \frac{2(r+1)\pi}{a+b} + \dots \right) \\ & \quad \left. + \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^{a+b-1} \sin \frac{(r+1)(a+b-1)\pi}{a+b} \right) \end{aligned} \right\}$$

og naar Rækkerne opsummeres (jfr. Ramus's Trigonometri pag: 15), faaer man

$$\xi_{r+1} = \frac{2}{a+b} \frac{p^{a+b} - q^{a+b} \sin \frac{(r+1)(a+b-1)\pi}{a+b}}{(\sqrt{pq})^{a+b-1} (1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{(r+1)\pi}{a+b})}, \quad (26)$$

som i Forbindelse med (24) giver C_{r+1} ; men det vil være bekvemmere at eliminere C_{r+1} af (23) ved Hjælp af Udtrykket for $\eta \xi_{r+1}$, som ifølge (24) og (26) bliver

$$\eta \xi_{r+1} = \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \frac{C_{r+1}}{\sin \frac{(r+1)\pi}{a+b}} = \frac{2}{a+b} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{a+b} \frac{\sqrt{pq} (-1)^r \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b}}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{(r+1)\pi}{a+b}}$$

Herved forandres (23) til

$$\left. \begin{aligned} & u_{x,y} = \frac{p^x - q^x}{p^x} \cdot \frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}} \\ & - \frac{2^{y+1}}{a+b} (\sqrt{pq})^{y+1} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{a+b-x} \frac{\sum_0^{a+b-2} (-1)^r \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b} \sin \frac{(r+1)x\pi}{a+b} \cos^y \frac{(r+1)\pi}{a+b}}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{(r+1)\pi}{a+b}} \end{aligned} \right\} (27)$$

For nu at komme til Opgavens endelige Løsning behøver man blot at forandre x til a og y til $b + 2i$, idet Spilleren A

for at vinde alle Jetons fra B nødvendigvis maa vinde et Antal af $b + 2i$ Spil, naar i betegner Antallet af de Spil, som han har tabt, og da man tillige har

$$\sin \frac{(r+1)a\pi}{a+b} = (-1)^r \sin \frac{(r+1)b\pi}{a+b},$$

faaes af (27)

$$\frac{2^{b+2i+1} (\sqrt{pq})^{2i+1} p^b}{a+b} \sum_0^{a+b-2} \left. \begin{array}{l} u_{a,b+2i} = \frac{p^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}} \\ \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b} \sin \frac{(r+1)b\pi}{a+b} \cos^{b+2i} \frac{(r+1)\pi}{a+b} \\ 1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{(r+1)\pi}{a+b} \end{array} \right\} \cdot (28)$$

Multipliseres dernæst Tæller og Nævner under Summations-tegnet med

$$1 + 2\sqrt{pq} \cos \frac{(r+1)\pi}{a+b},$$

forandres (28) til

$$\frac{2^{b+2i+1} (\sqrt{pq})^{2i+1} p^b}{a+b} \sum_0^{a+b-2} \left. \begin{array}{l} u_{a,b+2i} = \frac{p^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}} \\ \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b} \sin \frac{(r+1)b\pi}{a+b} \cos^{b+2i} \frac{(r+1)\pi}{a+b} \\ p^2 - 2pq \cos \frac{2(r+1)\pi}{a+b} + q^2 \end{array} \right\} (29)$$

idet

$$\sum_0^{a+b-2} \frac{\sin \frac{(r+1)\pi}{a+b} \sin \frac{(r+1)b\pi}{a+b} \cos^{b+2i} \frac{(r+1)\pi}{a+b}}{p^2 - 2pq \cos \frac{2(r+1)\pi}{a+b} + q^2} = 0;$$

thi naar r er et ulige Tal vil denne Række komme til at bestaae af et lige Antal Led, af hvilke det første og det sidste, det andet og det næstsidste o. s. v. Led blive ligestore med modsatte Fortegn. Er r derimod et lige Tal vil Rækken komme til at bestaae af et ulige Antal Led; men i dette Tilfælde vil det midterste Led altid være Nul og de øvrige Led forsvinde paa samme Maade som, naar r er et ulige Tal.

Da man fremdeles har

$$\begin{aligned}\sin \frac{(a+b-(r+1))\pi}{a+b} &= \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b} \\ \cos \frac{(a+b-(r+1))\pi}{a+b} &= -\cos \frac{(r+1)\pi}{a+b} \\ \cos \frac{2(a+b-(r+1))\pi}{a+b} &= \cos \frac{2(r+1)\pi}{a+b} \\ \sin \frac{(a+b-(r+1))b\pi}{a+b} &= (-1)^{b+1} \sin \frac{(r+1)b\pi}{a+b}\end{aligned}$$

indses uden Vanskelighed, at (29) ogsaa kan omskrives til

$$u_{a,b+2i} = \frac{p^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}} \left. \begin{aligned} & - \frac{2^{b+2i+2}(pq)^{i+1}p^b}{a+b} \sum \frac{\sin \frac{2(r+1)\pi}{a+b} \sin \frac{(r+1)b\pi}{a+b} \cos^{b+2i} \frac{(r+1)\pi}{a+b}}{p^2 - 2pq \cos \frac{2(r+1)\pi}{a+b} + q^2} \end{aligned} \right\} (30)$$

hvor Σ tages med Hensyn til r fra $r = 0$ til $r = \frac{a+b-2}{2}$, naar $a+b$ er et lige Tal, og fra $r = 0$ til $r = \frac{a+b-1}{2}$, naar $a+b$ er et ulige Tal, som stemmer nøiagtigt med det af Laplace fundne Resultat.

Vi skulle nu gaae over til at vise, hvorledes et specielt Tilfælde af det ovenfor fundne Resultat (30) har givet Anledning til at udlede Værdien af et bestemt Integral.

Sættes i (30)

$$\frac{r+1}{a} \pi = \varphi, \quad \frac{\pi}{a} = \Delta \varphi \text{ og } u_{a,b+2i} = y,$$

faaer man for

$$a = \infty \text{ og } p \geq q$$

følgende Udtryk

$$y = 1 - \frac{2^{b+2i+2} p^b (pq)^{i+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b+2i} \varphi \sin b \varphi \sin 2 \varphi d \varphi}{p^2 - 2 p q \cos 2 \varphi + q^2}. \quad (31)$$

Er $p < q$ behøver man blot at ombytte Tallet 1 paa høire Side af Lighedstegnet med $\left(\frac{p}{q}\right)^b$. (Jfr. Théorie analytique des Prob. pag. 235).

Men for $a = \infty$ kan Løsningen af den ovenfor omtalte Opgave ogsaa, saaledes som Laplace har vist, udtrykkes ved

$$y = p^b \left(1 + b p q + \frac{b(b+3)}{1 \cdot 2} p^2 q^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{b(b+i+1)(b+i+2) \dots (b+2i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} p^i q^i \right), \quad (32)$$

et Resultat, som oprindeligt skyldes De Moivre; men som forøvrigt er tilstrækkelig bekendt (jfr. t. Ex. Laurent Traité du Calcul des Probabilités pag. 85. Paris 1873.)

Ved Hjælp af følgende bestemte Integral

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu} \varphi \cos(m-n) \varphi d\varphi = \frac{[\mu]}{[m][n]} \cdot \frac{1!}{2^{\mu}}, \quad (33)$$

hvor $\mu = m + n$ og $[v] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots v$, og som skyldes Poisson (Journal de l'Ecole Polytechnique, 19 cahier page 490), kan Rækken (32) udtrykkes ved en Sum af to bestemte Integraler.

Skrives nemlig (32) under Formen

$$y = p^b \sum_0^i \frac{b}{b+2i} \frac{[b+2i]}{[b+i][i]} p^i q^i \quad (34)$$

og sættes dernæst

$$\mu = b + 2i, \quad m = b + i \quad \text{og} \quad n = i,$$

faaer man af (33)

$$\frac{2^{b+2i+1} b}{\pi (b+2i)} p^i q^i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{b+2i} \varphi \cos b \varphi d\varphi = \frac{b}{b+2i} \frac{[b+2i]}{[b+i][i]} p^i q^i \quad (35)$$

Men ved delvis Integration har man

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{b+2i-1} \varphi \sin b \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \frac{b}{b+2i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{b+2i} \cos b \varphi d\varphi, \quad (36)$$

saa at y nu ifølge (35) og (36) kan omdannes til

$$y = \frac{2^{b+1} p^b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_0^i 2^{2i} p^i q^i \cos^{2i} \varphi \right) \cos^{b-1} \varphi \sin b \varphi \sin \varphi d\varphi. \quad (37)$$

Fremdeles har man

$$\begin{aligned} \sum_0^i 2^{2i} p^i q^i \cos^{2i} \varphi &= \frac{1 - 2^{i+2} p^{i+1} q^{i+1} \cos^{2i+2} \varphi}{1 - 4 p q \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{1 - 2^{2i+2} p^{i+1} q^{i+1} \cos^{2i+2} \varphi}{p^2 - 2 p q \cos 2 \varphi + q^2}, \end{aligned}$$

hvorved (37) forandres til

$$y = \frac{2^{b+1} p^b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2^{2i+2} (p q)^{i+1} \cos^{2i+2} \varphi}{p^2 - 2 p q \cos 2 \varphi + q^2} \cos^{b-1} \varphi \sin b \varphi \sin \varphi d\varphi$$

eller, hvad der er det samme,

$$\begin{aligned} y &= \frac{2^{b+1} p^b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b-1} \varphi \sin b \varphi \sin \varphi d\varphi}{p^2 - 2 p q \cos 2 \varphi + q^2} \\ &\quad - \frac{2^{b+2i+2} p^b (p q)^{i+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b+2i} \varphi \sin b \varphi \sin 2 \varphi d\varphi}{p^2 - 2 p q \cos 2 \varphi + q^2}, \end{aligned}$$

Sammenlignes dette Udtryk for y med (31), sees, at man maa have

$$\frac{2^{b+1} p^b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b-1} \varphi \sin b \varphi \sin \varphi d\varphi}{p^2 - 2 p q \cos^2 \varphi + q^2} = 1 \text{ eller } = \left(\frac{p}{q} \right)^b$$

eftersom $p \geq q$ eller $p < q$, og man kan altsaa heraf udlede følgende Resultat.

Ere p og q to positive Tal bundne til Relationen

$$p + q = 1,$$

saa har man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b-1} \varphi \sin b \varphi \sin \varphi d\varphi}{p^2 - 2pq \cos 2\varphi + q^2} = \frac{\pi}{2^{b+1}} \cdot \frac{1}{p^b},$$

naar tillige $p \geq q$. Tilfældet $p < q$ faaes ved ligefrem at ombytte p og q .

$p = q$ giver

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b-1} \varphi \sin b \varphi d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{\pi}{2}$$

for alle positive Værdier af b med Undtagelse af $b = 0$.

Dette sidste Resultat er fundet ad anden Vei i Schlömilchs: «Analytische Studien» p. 80. Leipzig 1848.

Le Epigrafi Arabiche di Sicilia, trascritte, tradotte e illustrate da Michele Amari. — Palermo 1875.

(med et Atlas af fotograferede Tavler)

fremlagt efter Forfatterens Ønske i Mødet d. 25. Febr. 1876,

med følgende Bemærkninger af Professor Dr. **A. F. Mehren.**

De Erindringer, vi endnu finde skjøndt meget sparsomt paa Sicilien og i det sydlige Italien om Arabernes Herredømme, have deres Oprindelse fra en Tid, da Chalifatet i samme Forhold som dets Udvidelse ikke syntes at kjende nogen Grændse, efterhaanden tabte sin centraliserende Magt og begyndte at opløses i smaae uafhængige Stater. Spanien var næsten aldeles unddragen Regeringen i Baghdad, som ogsaa overlod Provinsen Ifriquia til sig selv; allerede Harûn ar-Rashid havde her indsat som Statholdere Familien Aghlab, der snart grundlagde det senere saaledes benævnte Dynasti, og de følgende Chalifer vare tilfredse med kun at vide deres Navne omtalte i Bønnen ved den offentlige Gudstjeneste i Moskeerne, idet de bedre foretrak at udbrede Fredens Civilisation og Velsignelser fremfor med Vaabenmagt at holde deres Autoritet vedlige over et Rige, hvis umaadelige Udvidelse oversteg Midlerne for dennes Haandhævelse. Den væsentligste Opløsningsspire i det Abbasidiske Chalifat var Ali's Slægt, til hvilken vi have at henregne de vigtigste for dette Tidsrum i Betragtning kommende Dynastier nemlig Idrisiderne i Maghreb eller Marocco, de noget senere Zirider og Fathimiderne i Ægypten. For at standse de undertvungne Berber-

stammers gentagne Oprør havde, som bemærket, Harûn ar-Rashid allerede ved A. 800 (184 H.) forlenet Ifriquiah til Familien *Aghlab*, der ved en snild Politik, balancerende mellem Chalifatet i Bagdad og de lidt senere af Alis Slægt i den vestlige Del af Afrika fremstaaende *Idrisider*, naaede i lidt over 100 Aar (800—911) en Uafhængighed, der kun levnede Chaliferne den rent aandelige Magt som Islams Overhoved. Efter Harûn ar-Rashid's og hans Søn al-Mamun's Regering vare disse desuden komne i fuldstændig Afhængighed af den under Navnet Mamluker bekendte Tyrkergarde, saa at en Digter fra den Tid ret passende har forherliget deres Beskrivelse i disse Vers:¹⁾

«En Chalif i sit Bur
 «Mellem Wasif og Bogha;
 «Han gentager, hvad man siger,
 «Ret som en Papegøie.»

Ibrahim Aghlab havde imidlertid som næsten uafhængig Fyrste udvidet sin Magt fra Atlanterhavet til Ægyptens Grændser, og hans Navn sattes i Bønnen ved Siden af Chalifens; paa Mynter, som forefindes i det herværende Myntcabinet fra næsten hver af de til dette Dynasti hørende 11 Fyrster, er Chalifens Navn aldeles udeladt; paa en af de ældste fra 190 H: (Ifriquia som Myntsted) læse vi blot: *و مَمَّا أَمْرُ بِهِ الْأَمِيرِ إِبْرَاهِيمَ*: *Paa Befaling af Emir Ibrahim*. Det Alidiske Dynasti Idrisiderne, der holdt sig nogle Aar længere, fra 803—949, gjorde imidlertid dem Magten stridig i Africa, og havde grundlagt den anseelige Hovedstad Fez, der rivaliserede i Vesten med Bagdad ved Luxus, Videnskab og Handel, i sidste Henseende som det vigtigste Forbindelsespunkt med Spanien. Aghlabiderne bleve derved indskrænkede til Mellemkysten af Nord-Africa (*Magreb el-Wusthâ* med Provinsen Ifriquiah), men udfoldede her en sjælden Pragt baade ved Rigets indre Bestyrelse og ved lykkelige Krigstog mod de

¹⁾ S. Les prolégomènes d'Ibn Khaldoun par M. de Slane I, p. 49.

christne Stater ved Middelhavet; nye Byer anlagdes; Tunis, Tripolis og Kayrovân opfyldtes med Pragtbygninger, hvis Levninger endnu overraske den Reisende; Kunst, Videnskab og Industri naaede snart i Vesten, hvad Harun og al-Mamun havde bragt det til i Østen. Postforbindelser indrettedes fra Grændsen af Maghreb til Ægypten, og en anseelig Flaade stod til Raadighed for Krigstog til Søes. De tidligere Statholdere i Afrika havde allerede oftere foretaget saadanne Tog mod Italiens og Frankrigs Kyster, Corsica, Sardinien og Sicilien; de italienske og franske Krøniker indeholde en Del forvirrede Efterretninger herom; de lod sig imidlertid nøie med Plyndringer uden at at efterlade videre Spor. En Strid mellem de græske Statholdere gav Aghlabiderne en længe søgt Leilighed til at sætte sig fast i Sicilien; Ibrahims Efterfølger *Ziâdet-allah* tog Parti, og en Flaade udsendt fra Susa erobrede 827 Mazzara og kort efter Girgenti paa Sicilien, hvor de efter at være bragte til en fortvivlet Modstand holdt sig to Aar. Efter at have erholdt Forstærkning fra Africa erobredes 831 Palermo, hvormed Siciliens Skæbne var afgjort. Byerne i det indre Land og paa Østkysten holdt sig længst og underkastede sig først efter et heltemodigt Forsvar som Kasr-Jani (Castro Giovanni), Noto, Taormina og Catania, Syracus endelig ved A. 878. Det var Indbyggerne selv, der fortsatte denne haardnakkede Kamp, medens Regeringen i Byzanz kun iagttog Begivenhedernes Gang. Det arabiske Herredømme udbredte i Virkeligheden større Cultur og Civilisation, idet man desuden overlod Indvaanerne fuld Frihed mod en ikke trykkende Skat. Agerdyrkning og forskellige industrielle Kunster bleve af Araberne bragte til en ukjendt Glands; man drev Bjergværksvæsen, og Marmor med Porphyr tjente til Udsmykkelse for Bygningerne. Denne Fredens Udvikling forhindrede imidlertid ikke Arabernes Krigstog. Efter at være blevne Herrer paa Sicilien satte de sig snart fast paa Italiens Sydkyst, en Del af det saakaldte «*Store-Land*», og erobrede Brindisi og Bari; fra Tarent, der 844 faldt i deres Magt trængte

de ind i Hertugdømmet Benevent; selve Roms Forstæder bleve plyndrede og Civitavecchia ødelagt 846. Foruden Sicilien besad Araberne i Midten af det 9de Aarh. Malta, Gozzo, Comino og Pantellaria, Sardinien, Corsica og Balearerne. I Begyndelsen af det 10de Aarh. maatte Aghlabiderne, der tilsyneladende anerkjendte Chalifatet i Baghdad, vige for de Alidiske *Fathimider*. Disse havde omtrent 50 Mil fra Tunis anlagt Hovedstaden Mahadia med det Formaal herfra at erobre Ægypten. Den Fathimidiske Fyrste anerkjendtes af Sicilien og Sardinien, medens den største Del af Africas Nordkyst faldt til Omayaderne i Spanien. Saasnart imidlertid Fathimiderne havde begrundet det 3die Chalifat i *Cáhira* (358 H. = 970 Ch.) ved Siden af de samtidige i Baghdad og Cordova, overlod de Resten af Maghreb til et Statholderskab, der snart indtager Aghlabidernes Plads og grundlægger det under Navn *Zirider* bekjendte Dynasti, medens Idrisiderne bukke under for de spanske Omayader. De nylig omtalte arabiske Erobringer i Middelhavet tabtes efterhaanden, som de tyske Keisere vare bleve Herrer over Italien, og Ziridernes Magt strakte sig snart kun ud over Distriktet om Tunis langs Kysten henimod Algier og Bugia. Ved A. 1017 havde en Flaade fra Genua og Pisa forjaget Araberne fra Sardinien, noget senere fra Corsica; de værste Modstandere hævdede sig nu med Normannerne. Disse i Forbund med Grækerne havde erobret Tarent 1035, og allerede 1043 vare Araberne nær ved at tabe Sicilien. Kun en kort Tid formaaede det nye Dynasti *Almoraviderne* at holde Islams Undergang tilbage; efter Candias Erobring af Venetianerne faldt endelig Sicilien i de Normanniske Erobreres Magt. Rob. Guiscard og hans Broder Roger, der havde grundlagt en uafhængig Stat i det sydlige Italien besluttede 1064 at passere Strædet ved Messina og erobre Sicilien, hvor Ziriderne ikke længer formaaede at standse Anarchiet. Efter Erobringen af Catania og Palermo underkastede sig Øen Normannerne 1072. De nye Seirherrer behandlede imidlertid Araberne med Venskab og Skaansel, mest af Frygt for at Landet

skulde tabe i Rigdom og Civilisation ved en pludselig Udvan-
 dring af den intelligente Befolkning; uagtet de havde erholdt
 fuld Religionsfrihed og Eiendomssikkerhed, forsvinder dog i
 Løbet af de nærmeste 200 Aar lidt efter lidt Islams Befolkning
 af Sicilien, og da Roger II havde tvunget Kysten af Nord-Afrika
 til at anerkjende sit Herredømme, bleve Ziriderne nødte til at
 trække sig tilbage til Mellem-Afrika efter et Herredømme af hen-
 ved 177 Aar fra (971—1148). Disse Minder om Arabernes
 Herredømme i denne Del af Syd-Europa, som Roger I i et Do-
 cument fra A. 1090 for at bevise det undertvungne Folks Stor-
 hed beskriver som «store og talrige Ruiner af Stæder, Spor af
 Paladser, opførte med en vidunderlig Kunst og afpassede saavel
 til Bekvemmelighed som til enhver Luxus og Livsnydelse» fort-
 satte endnu i et Par Hundredaar under de christne Fyrster
 deres Virkning i Cultur og Kunst, og de følgende Herskere lige
 til Frederik II af Hohenstaufen rettede saa vidt muligen deres
 Bestræbelser paa at vedligeholde den Arabiske Indflydelse selv
 med Fare for at synes at hylde Islams Lære. — Vi ville i nogle
 enkelte Træk betragte denne Fortsættelse af Arabernes Civilisa-
 tion og Cultur under de nærmeste christne Fyrster. — Efter
 Roger I's Død 1101 bestyredes Regeringen af Grevinde Adelaide,
 der residerede i Palermo; vi finde første Gang blandt de øverste
 Embedsfunktioner den nye Værdighed «*Ammiraglio*» omtalt som
 Titel for Byens Guvernør. Ordet er en Fordreielse af det ara-
 biske Emir, der i ældre Diplomer engang imellem er gaaet over
 til Admiratus, Admirator, Admirais og lignende Forvanskninger,
 frembragte for at skaffe Ordet en Betydning i det Latinske; en
 endnu nærmere Tilslutning til det Arabiske har Titelen «*ammiraglio dei ammiragli*» = Emir el-Omarâ for Første-Minister og
 Kongens Befuldmægtigede. Den samme Person havde under-
 tiden med denne Stilling tillige Function af Marineminister, og
 i Løbet af et Hundredaar gik Ordet over i den almindelige Be-
 tydning «Admiral», hvori det nu forekommer. Under Roger II
 (1118—54) indførtes det hele arabiske Hofceremoniel, der brugtes

under Fathimiderne, og hvorom vi have en vidtløftig Beskrivelse hos Makritzi.¹⁾ Vi finde *Hâgîb* som Titel for Kammerherre eller som i Spanien for Premier-Minister; *Djânîb* = Adjutant, *Selâhi* eller *Selâhdar* = Vaabenbærer eller Rustmester, *Djamdâr* = Garderobemester, *Ostadâr* = major domus, *Djokendâr*, Manège- eller Turnermester, *Kâid*, Befalingsmand, *Farrâsh*, Page over Tapisserier og Tepper, *Tharrâz*, der havde Tilsyn med Guldbroderierne paa Tepper og Klædningsstykker. Af denne sidste Art besidde vi endnu et prægtigt Exemplar indvirket med en Indskrift i Guld og Perler, der omgiver et i Midten symbolsk Billede, fremstillende en Løve, der slaaer en Kamel til Jorden; Indskriften i colossale cufiske Bogstaver begynder: Af Arbejder for det kngl. Skatkammer, beskærmet i Velsignelse , og slutter: i Siciliens Hovedstad A. 528 H. = 113³/₄ Ch.²⁾ Denne Kappe er vandret fra Sicilien til Tydskland, bevaret en Tidlang i Nürnberg og i dette Øieblik i Wien mellem Relikvierne efter Carl den St. At den arabiske Cultur og Civilisation holdtes i ukrænket Ære under det Normanniske Dynasti, finde vi overalt bekræftet; et interessant Vidnesbyrd giver os den arabiske Reisende *Ibn Djobeir*, der paa sin Tilbagereise over Middelhavet til Spanien strandede med Skibet paa Kysten ved Messina. Sin Henrykkelse over at finde Mennesker istedetfor, hvad han havde frygtet, at skulde plyndres og dræbes af vilde Røvere, meddeler han ret naivt i sin Reisebeskrivelse saaledes³⁾: «Fyrsten (Kong Vilhelm II) er beundringsværdig i sin Behandling af Islams Befolkning; han selv holder fast ved Islams Tro og forlader sig fuldkommen paa Muhammedanerne; til sin Vagt har han et Corps af Negre, der alle høre til Islam og som kommanderes af en *Kâid*; de høieste Statsembeder ere be-

¹⁾ S. al-Khithath vol., p. 401 sq. ed. Cah.

²⁾ Smlgn. en af de ældste Beskrivelser: Inscriptio Arab. Pallii imper. Pannoni confecti, delin. et explicat. a de Murr, Norimbergæ 1790; gjen-given af Gregorio, p. 172.

³⁾ S. the travels of Ibn Jubair ed. by W. Wright, p. 328.

troede Prophetens Folk, ja endog hans Køkkenmester er Muselman. Han har et prægtigt Harem, bevogtet af Eunucher. Iblandt christne Fyrster findes ingen stoltere, rigere og mere luxuriøs Hersker; i sin Hofførelse, Fordeling af Æresposter, Udbredelse af Glands og Pragt er han aldeles lig Islams Herskere. Han er omgivet af Læger og Astrologer, hvem han sætter Pris paa, saa at naar Nogen af dem tænker paa at forlade Landet for at gjensee sine Troesbrødre, holder han ham tilbage med en rigelig Pengeanvisning for at bringe ham til at glemme Fædrelandet. Han læser og skriver Arabisk; hans Underskrift er, efter hvad en af hans Vezirer har meddelt mig: «*Priset være Allah med sand Lovprisning*»; ligesom hans Faders var: «*Priset være Allah til Tak for hans Velgjerninger!*». Hans Favoritinder ere overveiende af Prophetens Folk, og det Forunderligste er, hvad Opsynsmanden over Guldbroderierne har meddelt mig, at de frankiske Piger, som optages i hans Slot, vende tilbage til deres Hjem som Bekenderinder af Islam, omvendte af deres muhammedanske Veninder. Paa denne Ø indtræffe hyppigt Jordskælv; ved en saadan Leilighed blev Fyrsten forfærdet, idet han rundtom i Slottet kun hørte Allah og Prophetens Navn blive paakaldte. Naar da nogen af hans Omgivelser frygter for at falde i Unaade, pleier han at berolige dem med disse Ord: «Lad Hver anraabe sin Herre og Skaber, og den, hvem han troer paa!»

Paa Mynter fra Roger II's Tid, der haves i Mængde adspredte i de forskjellige Cabinetter, fører Fyrsten den arabiske Titel *al-mutazz billah al-melik Roger-al muazzam*, medens vi paa Reversen finde det christne Kors med de græske Bogstaver **IC. XC. NIKA.** og i Randen den arabiske Indskrift:

«Dhuriba bimedinat Sikelia» (slaet i Siciliens Hovedstad.)¹⁾

To endnu mere eiendommelige Mynter haves i det her-

¹⁾ cfr. Marsden Numismata orient., p. 300.

værende kongl. Myntkabinet: den ene, en lille Sølvmynt, har denne Indskrift:

A. بَأْمَرِ مَرْجَلِ اَنْشَانِي ɔ: paa Befaling af Roger II.

R. اَلَا اِلَهَ
وَحْدَه لَا شَرِيكَ لَه
لَا اِلَهَ

ɔ: «Der er ingen Gud undtagen Allah, han har ingen Deltager».

Den anden, en lille Guldmynt:

A. i Midten .†.

R. اَلَا اِلَهَ
مُحَمَّدٌ رَسُوْلُ اِلَه
لَا اِلَهَ

ɔ: «Der er ingen Gud undtagen Allah, Muh. er Herrens Apostel».
Randen er afslidt paa begge.

Fra *Tankred* have vi en lille Sølvmynt med denne Indskrift:

A. تَنْقَرِيْد Tankred,
مَلِكُ صِقَلِيَّةِ Konge
Siciliens

R. TNCR | REX SI | CILIAE.

Fra Henrik VI en lille Guldmynt:

A. i Randen هِنْرِيْكُ قَيْصَرِ اَوْغُسْت; i Midten †

R. $\frac{IC}{NI} | \frac{X}{KA}$

medens vi paa Frederik II's ofte læse den arab. Titel: اَمْعَنَرُ بِاللَّهِ
فَرْدَرِيْكُ اَمْعَضَم (som paa Roger II's.¹⁾)

Af Edrisi²⁾, den berømte arabiske Geograph, der udgav Kongens Cosmographi, tituleres Roger II som de Fathimidiske Chalifer «al Moqtadir biqadrat-illâhi», «den ved Allahs Magt Op-høiede, Konge af Sicilien, Italien, Lombardiet og Calabrien,

¹⁾ cfr. «Monete cufiche dal Dom. Spinelli», p. 122.

²⁾ S. éd. de Jaubert t. I, p. XVI et bibl. Arab. sicula, p. 15.

Imâm af Rom, Forsvarer af den christne Tro». — Efter det nylig omtalte Navn, al-Mutazz, kaldtes et kongeligt Lystslot ved Palermo «*al-Mutazziah*», der som det synes er antydet i en senere til Vilhelm II's Tid hørende Indskrift. — I den arabiske Poesi, der blomster under Roger II, fremkommer en ny Digteform, der har opgivet den ældre Metriks skolerette Tvang; den bestaaer ofte i Stanzer, hver paa 3 Linier med 8 Stavelser, hvori hvert Vers i den ene Stanze rimer med det tilsvarende i den næste; de benævnes «*al mowashshehât*» eller «*azdjâl*» og ere blevne meget almindelige i det Vulgær-Arabiske.¹⁾ At omtale de forskjellige Grene af Kunst og Industri, der skyldes de under det normanniske Dynasti beskyttede Arabere, vilde føre til en historisk Udvikling, der allerede i flere Retninger er gennemført; jeg skal derfor her indskrænke mig til blot at nævne Silkevæverierne, Papirfabrikationen og Sukkerets Frembringelse som Frugter af den arabiske Civilisation, der over Sicilien er kommen det øvrige Europa til Gode. Vi gaae da over til Architecturen, hvis enkelte Minder her foreligge. Saa vidt disse endnu ere bevarede, idet vi aldeles forbigaae hen smuldrede og formløse Ruiner, tilhøre de alle den Normanniske Periode, da neppe nogen eneste Bygning er vedligeholdt oprindelig fra Arabernes Tid. Hvad vi have, er kun opført af Arabiske Architecter i maurisk Stil. Den arabiske Architectur stammer vistnok fra en Paavirkning af de Persiske Sasanider, idet vi efter menneskelig Sandsynlighed neppe kunne forudsætte noget medfødt Talent i denne Retning blandt Ørkenens Naturbørn; blandet med byzantisk Smag antog den i de første Aarhundreder efter Hedjra en eiendommelig Retning i Syrien og Ægypten, gik herfra under Agglabiderne over til Sicilien og bevarede her af Normannerne, hvis Bygmestere næsten alle enten vare Islams Bekjendere eller i al Fald af Arabisk Herkomst lige indtil Slutningen af det 12te Aarh., hvad de hyppigen

¹⁾ En stor Samling af denne nyere Poesi haves udgiven under Titel: «*Sa-finet el-Mulk wa nafisat al fulk*» af den moderne Digter Shihâb ed-Din, lith. i Cahira.

i christne Kirker forekommende arabiske Indskrifter tydeligen bevise. Vilhelm I [† 1166] er berømt som Grundlægger af den herlige Villa, som han gav Navnet *el-Aziz*, senere fordreiet til *Ziza*, hvis Indskrifter vi om et Øieblik skulle gjøre Bekjendtskab med. Endnu før dette Palais fuldendtes, døde den kongelige Bygherre, ledsaget til Graven af en Skare islamske Kvinder, der i hvide Klædebon med flågtrende Haar udstødte deres Klageskrig til Cymblernes Klang. Under hans Efterfølger Kong Vilhelm II opførtes det i Pragt med *Ziza* rivaliserende *Cuba* (en Fordreielse af det arabiske «*alqubba*» Pavillon eller Kuppelpalais), omtalt af Boccacci i il Decameron¹); paa en Indskrift læse vi endnu «*for Jordens bedste Hersker Vilhelm II, A. 1180.*» — Med denne Konges Død 1190 begynde lidt efter lidt Religionsforfølgelserne mod Islams Befolkning, der nødes til at flygte ind i Bjergegnene mod Vest for her at forberede den sidste Fortvivlelsens Kamp. Henrik VI erobrer Palermo d. 30 Novbr. 1194 og har efterladt et ved Tortur, Blodbad og Plyndring vidt berømt Navn. Eiendom og Liv vare nu ikke længer sikkrede Prophetens Folk, som rustede sig i Bjergegnene ved *Val di Mazara*, medens deres Huse i Stæderne gaves som Foræring til Keiserens Tilhængere. Frederik II var ikke stærk nok til at følge sin Tilbøielighed til at anerkjende Islams tabte Rettigheder, men gav efter for de politiske Forviklingers Magt; han maatte lade sig nøie med at vise en theoretisk Sympathi med enkelte af Islams Lærde og at slutte Forbund med nogle samtidige muhammedanske Fyrster, et Forhold, der imidlertid var tilstrækkeligt til i Krønikerne at skaffe ham Titelen: «*pestifer et maledictus, schismaticus, hereticus et epicureus corrumpens universam terram*». I blandt hans Gudsbespottelser tillægges ham i samme Krønike dette Udsagn: «*Herren vilde ikke have rost det hellige Land saa meget, hvis han havde kjendt Terra di Lavoro,*

¹) S. giornata V, nov. VI i Begyndelsen: «*d'un suo giardino, il quale chiamava la Cuba.*» Det er Kong Frederik II, hvem Haven siges at tilhøre.

Calabrien, Sicilien og Apulien» ¹⁾). En anden tydsk Krønike lader ham sige: ²⁾ «Tres baratores seu guillatores fuerunt in mundo: Moses, Christus et Mahomet.» Dette sidste Paafund, der efter al Kritik umulig kan tillægges denne Fyrste, men formodentligen en eller anden Tilhænger af Averrhoes, har igjen fremkaldt Antagelsen, at Frederik II var Forfatter til det ofte omtalte, men rimeligvis aldrig eksisterende Skrift «de tribus impostoribus». — At Kongen imidlertid stod i videnskabelig Brevvexling med Islams Philosopher beviser tydeligen nok en Codex Arab., tilhørende det Bodleyanske Bibliothek, under Titel: «De Sicilianske Spørgsmaal» ³⁾). Han fremstiller heri 4 à 5 Spørgsmaal til Besvarelse, nemlig: hvorvidt Verdens Evighed kan bevises; hvad Theologiens Formaal er som Videnskab; hvor mange Videnskabens Grundkategorier ere, og om 10 er det faste Tal; hvilke Beviserne ere for Sjælens Udødelighed; endelig hvorledes man skal forklare sig Muhammeds Udsagn: «den Troendes Hjerter er imellem den Barmhertiges to Fingre».

Omtrent fra 1246 forsvinder Siciliens arabiske Befolkning eller blandes, uden at efterlade videre Spor, med Øens øvrige Indbyggere, endskjøndt vi rigtignok fra muhammedanske Historieskrivere have en Beretning, at endnu ved 1260 iagttoges den 5 Gange daglig foreskrevne muhammedanske Bøn af Islams Soldater i Manfreds Leir. — Med Hensyn til Sproget havde det Arabiske neppe nogensinde fortrængt hos den almindelige Befolkning det Græsk-Romanske Element, og i den store Samling af Aktstykker, vi have foreliggende i omhyggelig Udgave ⁴⁾, finde vi som oftest Græsk og Arabisk ved Siden af hinanden, sjældent

¹⁾ S. la chronica di Salembeni, p. 3, 168.

²⁾ Cfr. Muratori, *Rer. Ital. scriptores*, t. III, p. I, pag. 585.

³⁾ V. Cat. bibl. Bodl. Al. Nicoll, Vol. II, p. II, p. 582—83 og *Journ. Asiat.* 1853, p. 240. Forfatteren *Ibn Sab'in* († 1271), gav selv sit Arbeide Navnet «*al mesâila-s-Siqeliyah*», der findes i Slutningen af Haandskriftet. cfr. *Bibl. Arab. Sicula*, p. 573.

⁴⁾ *Diplomi Greci ed Arabi di Sicilia, pubblicati nel testo originale, tradotti ed illustrati da Salvatore Cusa, Palermo 1868.*

derimod det Latinske; paa Vestkysten af Sicilien og paa Øerne vedligeholdt det Arabiske sig længst f. Ex. paa Pantellaria indtil det 16de Aarh.; som bekjendt kunne Malteserne endnu for Øieblikket meget vel forstaae og benytte den mauriske Dialekt, der tilhører den nærmeste Afrikanske Kyst.

De arabiske Indskrifter, der her foreligge, havde allerede i forrige Aarhundrede sysselsat en Del Orientalister paa en Tid, da disse Studier endnu vare i deres første Udvikling; vi have saaledes fra Slutningen af forrige Aarh. en Samling af *Gregorio Rosario* under Titelen «*ampla collectio rerum Arabic., Panormi 1790*», der igjen støtter sig til adskillige foregaaende Forsøg af *Caruso*, *Torremuzza*¹⁾ og *Tardia*; det var imidlertid især *Tychsen*, der fremmede adskillige brugbare Forklaringer i Gregorios Værk. Hvor ufuldstændige disse imidlertid til den Tid vare, kan et Exempel oplyse: det arabiske Ord «Sulthan» kan til Nød af den med denne Art Epigraphi Ukyndige forvexles med Ordet «Allemån»; da et ulykkeligt Indfald havde fremkaldt Feiltagelsen, byggede man nu videre herpaa, antog denne «Allemån» for Keiser Frederik II's Medkeiser Otto eller læste endog Athån d. e. Otto for Sultan og fremstillede endelig heraf en lærd historisk Conjectur om Arabernes Forbindelse med denne Keiser mod Frederik II²⁾. Indfaldet var omtrent ligesaa godt, som at lade det nysomtalte Palais Ziza være opkaldt efter et Tilnavn til Ceres (Azezia) eller lade begge Palaierne Cuba og Ziza føre disse Navne til Erindring om en ukjendt arabisk Fyrstes to Døttre. Efter at man i det mindste for *disse* Studiers Vedkommende nu er kommen til fuld Erkjendelse om, at Kundskab i det paagjældende Sprog er en af de fornemste Betingelser for en Indskrifts Dechiffriering, vil man neppe saa let faae Leilighed

¹⁾ Siciliæ veterum inscriptionum nova collectio ed. Gabr. Castellus, Panormi 1784; mod Værkets Slutning findes nogle arab. Indskrifter gjen-givne og forklarede. v. p. 313—15.

²⁾ S. Gregorio Rosario, *Ampla collectio rerum Arab.*, p. 179—183.

til at træffe Lignende gjentaget. *Lanzi*, der i 1840 og 45 udgav nye Samlinger, har Fortjenesten af at have gengivet paa lidelige Afbildninger af originale Grav-Indskrifter og andre, adsplittede omkring i Europas Museer, men savner Paalidelighed i Læsningen. Først *Fraehn* og *Reinaud* have vist, hvorledes der burde arbeides, men kun meget sparsomt givet sig af med sicilianske Mindesmærker. *Amarì*, hvis Lærdom og sunde Kritik kun opveies af Kjærlighed til hans smukke Fædreland, har forberedt disse Studier i Landflygtighed under sit Ophold i Paris, da 1854 Begyndelsen af Værket «*Storia dei Musulmani di Sicilia*» udgaves¹⁾. Under dette Arbeides Fuldførelse i Forbindelse med det i 1859 udkomne «*Carte comparée de la Sicile moderne*», gaves ham som Cultusminister i det af Revolutionen seirrig fremstaaede Kongerige Italien rigelig Leilighed til at redde og undersøge sin Fødeøs historiske Minder, der, allerede engang tidligere meddelte i Tidsskriftet *Revista Sicula*, nu udkomme i en samlet Udgave, hvis 1ste Bind her foreligger, og skulle tjene som oplysende Bilag til «*Storia dei Musulmani*»; paa samme Maade forberedes en pragtfuld Udgave af de paa Sicilien bevarede diplomatiske Aktstykker henhørende til samme Periode af Prof. Salvatore Cusa, ligesom et lignende Værk over det Arabiske Møntvæsen i den nærmeste Tid imødesees ved Prof. *Mortillaro*. Som et smukt Exempel paa med hvilken Iver man i Italien arbejder paa at bevare historiske Minder, skal jeg endelig anføre, at d. 29de Aug. f. A. holdtes en *congresso dei scienziati Italiani*, præsideret af Conte Terenzio Mamiani; efter en festlig Sammenkomst i Palermo gaves Deltagerne, blandt hvilke man ved Indbydelsen havde tiltænkt mig den Ære at medregnes, Leilighed til i 10 Dage at bereise de ved Ruiner berømteste Egne for at raadslaae om passende Forholdsregler til disses nærmere Undersøgelse.

Den Indskriftsamling, hvis 1ste Bind vi her have for os

¹⁾ Sidste Del af vol. III er udkommen 1872 og hele Værket hermed sluttet.

omfattende Bygningsindskrifter, indhugne i Steen eller paa Marmortavler, vil blive efterfulgt af to andre Bind, indeholdende i Hdet B. Gravindskrifter, i IIIde B. Indskrifter paa forskjellige Brugsgegenstande, som Vaser, Gemmer og Lignende. De to første skulle omfatte Alt, hvad der af denne Art findes paa Sicilien, medens det sidste Bind udelader, hvad der ikke med nogenlunde Sikkerhed kan antages for Siciliansk Arbeide, eller som kun indeholder ubetydelige Formler.

Tav. I. Den første Indskrift fra Castellet i Termini, der blev restaureret af Fathimiden Moizz li-din-allah A. H. 356 (966 Ch.)¹⁾, er næsten fuldstændig bevaret. Den ærede Forfatter har ved at forfeile et beskadiget Ords Læsning forudsat et Hul i Indskriften, som ikke er tilstede; kun den øverste Hersker kan befale, ikke Bygmesteren; naar vi derfor restituere et Ord, der tilkjendegiver Hensigten med Bygningens Opførelse «som til Værn for» eller «af Naade» (حصنا eller جودا i Lighed med den af mig læste Indskrift fra Saladins Tid paa Castellet i Cåhira)²⁾, er Alt i den bedste Orden: . . . «Af det hvad befalede at opføres [til Værn eller af naadig Velvillie] for de Troende Imåm Moizz li-din-allah o. s. v. — Statholderens Navn *Ahmed b. al Hasan* med Aarstallet 34x slutter da det Hele.

2) Paa samme Tavle fra Capella Palatina i Palermo gives en smuk og aldeles tydelig Indskrift, der erindrer om et af Kong Roger II for sit Palais indrettet Vanduhr, sandsynligen ligt det under Harun al Rashid til Carl den St. forfærdigede; den har Aarstallet 536 H. = 114¹/₂ Ch.³⁾.

Tav. II. Marmortavler fra «*Chiesa dell Annunziata* og *Duomo*» i Messina, indeholde Vers til Forherligelse af Rogers Palads i Messina. Af et fuldstændigt bevaret Vers: «O kongelige Selskab, træder ind her; dette er Salighedens Bolig», gjen-

1) *Storia dei musulmani*, t. II, p. 274; den samme Indskrift er næsten ukjendelig hos Gregorio, p. 167.

2) S. Cåhirah og Kerafat, I D. p. 18.

3) Den samme Indskrift findes hos Gregorio, p. 176.

kjende vi det arabiske Versemaal «kâmil»; Rogers Navn læses desuden tydeligen et Par Gange: «Fyrsternes Hoved, Kong Roger».

En lignende Tavle, bevaret i Museet i *Palermo*, har et Vers af ensartet Indhold, tydeligt og let at læse, i Versemaalet Raml.: «Træd ind, kys og omfavn dette Hjørne; betragt den Skjønhed, denne Bygning indeholder!» med en Hentydning til Besøget af Kaabaen i Mekka.

Tav. III—IV ere 20 decorative Rosetter, anbragte efter Sandsynlighed i Loftet af et Palais i Palermo; i Kanten læses en Del Lykønskingsudtryk lignende dem, som findes paa den omtalte Kappe fra Rogers Tid.

Tav. V. Indskrift i gammel Cufisk Character fra Taarnet af den nu ødelagte Kirke *St. Giacomo la Mazara* i Palermo; den har en Række lignende Udtryk som de foregaaende Rosetter; til Slutning synes Aaret 1100 at komme frem. — Samme Plade indeholder (Nr. 2), en Stenindskrift, bestemt til en Grav eller en saakaldet Sebil, offentlig Fontaine, der findes i stor Mængde i Cahira, og hvis Opførelse betragtes som et Fromhedsværk; den giver os Navnet «*Barun, Page hos den kngl. Majestæt*»; om vi skulle opfatte dette Barun som arab. Egennavn, eller feudal Titel for en Person, der i al Fald ikke behøver at høre til Islam, er usikkert, skjøndt jeg er tilbøielig til den sidste Antagelse. Aarstallet mangler.

Vi have endnu paa denne Plade en Stuccatur-Indskrift fra Paladset *Ziza* i Palermo; af de 4 udenfor Byen beliggende Lystslotte *Favara, Menani, Ziza og Cuba*¹⁾ ere kun de to sidste bevarede. Amari har efter den oftere tilforn forsøgte Dechiffriering bragt nogle regelmæssige arabiske Vers ud; da den fotografiske Gengivelse er mørk og utydelig, formaaer jeg ikke at udtale videre nogen Mening; Navnene *al-Mostaizz* og *Aziz* forekomme mig rigtige, hvilke bekræfte Tiden under Vilhelm II, som den der fuldendte Opførelsen af dette Palads.

¹⁾ S. Storia dei Muselmani, t. III, p. 491.

Tav. VI. Idet denne kun frembyder nogle usammenhængende Brudstykker af en ydre Murindskrift paa det samme Palads Ziza, og den photographiske Gjengivelse, der har været forbunden med store Vanskeligheder, er i høi Grad utydelig, tilfredsstilles vi saa meget mere ved de to Murindskrifter paa Fløiene af Paladset Kùba beliggende udenfor Palermo paa Veien til Monreale.

Tav. VII—VIII give det photographiske Billede af de enkelte fra Gesimsen nedtagne Stene, der nu bevares i Museet; efter Paakaldelsen af Allahs Navn læses aldeles tydeligen de første $1\frac{1}{2}$ Vers af den østlige Fløi: «Betragt, stands og sku. Du vil see det smukkeste Palads, tilhørende den bedste af Jordens Konger *Vilhelm II*; ethvert Palais er ringe og staaer tilbage . . .» Det Øvrige giver kun Brudstykker; paa den vestlige Side finde vi Aarstallet, udtrykt i samme Versemaal «thawil»: «i den lykkeligste Tid og det gunstigste Øieblik: efter den Herre Messias 1100, hvilke 80 Aar følge»

Tav. IX frembyder kun Indskrifter af underordnet Betydning indeholdende Koransteder o. l. paa Søiler og Marmorplader fra Kirker i Palermo og Museet. I Nr. 9 er vel formodentligen at læse det sædvanlige Ord «*el izz*» for «*almizz*», der neppe her kan tænkes anvendt i en saa almindelig Frase.

Tav. X har en arabisk Kuppelindskrift fra Kirken *Sta Maria dell Ammiraglio*; begyndende med «i Navnet Faderens, Sønnens og den H. Aands» indeholder Resten en liturgisk Formel, brugelig i de Orientalske Kirker. Idet Bygningen er opført af den christne Giorgio fra Antiochien, gr. ammiraglio af Sicilien i det 12te Aarh., have vi en tilstrækkelig Forklaring af den arabiske Indskrifts Bevarelse i en byzantisk-arab. Kirke; den blev først opdaget ved en Restauration af Kuppelen 1871 og derefter meddelt af Amari i «*Annuario della Società Italiana per gli Studii Or. 1872*».

Foruden et Par Søileindskrifter, der indeholde almindelige Korasententser, have vi endelig en i Universitets-Museet i

Messina bevaret Marmortavle af den Art, der i Orienten findes over Portalerne til de fleste Moskeer. Efter det til denne Brug hyppigen anvendte Coransted Sur. IX, v. 18 angives, at «denne Moskee i Alexandrien er bleven beriget med Legater og restaureret A. 477 H» af Abu-l-Nedjm Bedr al-Mostanseri, identisk med den af mig i Cahira og Kerafat¹⁾ omtalte Fathimidiske Overgeneral Emir el Gojûsh *Abu-l-Nedjm Bedr al-Gemâli* [† 487], der under Navnet «*Gojushi*» betragtes endnu af Almuen som Cahiras Skytspatron. — I Indskriftens Gjengivelser ere et Par Feiltagelser indløbne: l. 3 maa læses «nâsir el-imân, Troens Forsvarer», ikke «difensore dell' imâm; l. 5: «hâdsâ», da det følgende Gâmi' er Hankjøn; og endelig l. 7: «el-hubs», ikke «el-hubûs» og *wewallâ* for *wedallâ*, der neppe giver nogen Mening.

¹⁾ 1ste D. p. 17 & 76.

Funiculus scleroticae,

en Levning af den foetale Spalte i Menneskets Øie,

efterviist af

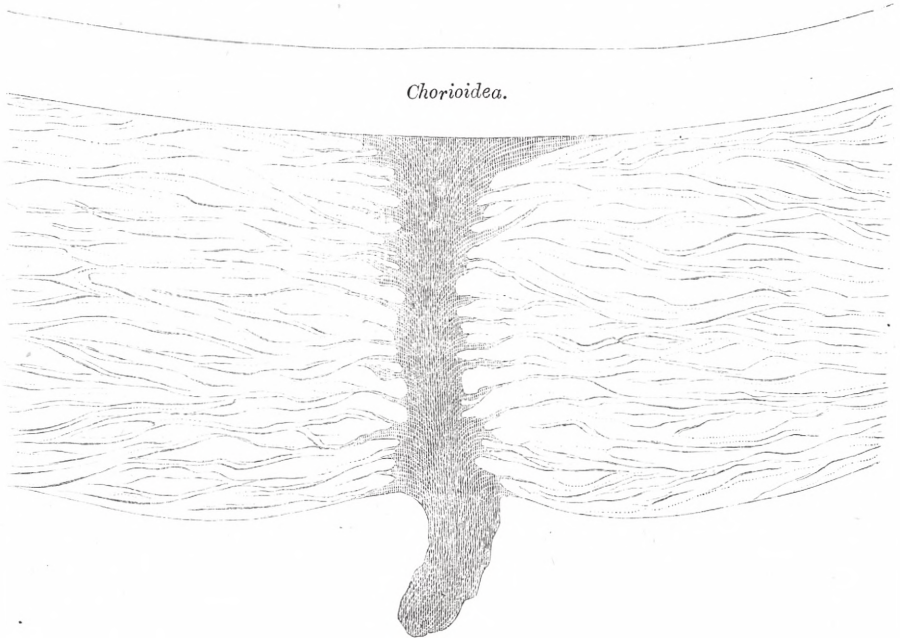
Adolph Hannover.

Meddelt i Videnskabernes Selskabs Møde d. 8de December 1876.

I en Afhandling om Coloboma oculi har jeg fremstillet Coloboma som en Standsningsdannelse, beroende paa en mangelfuld Lukning af den Spalte, der findes hos Foetus i alle Øiets Hinder samt i Glaslegemet, Iris og Corpus ciliare; jeg kaldte derfor Coloboma et stort foetalt Øie, hvori den foetale Typus var gjennemført konsekvent i alle sine Enkeltheder. I det normale Øie hos den Voxne har man hidtil kun kjendt een konstant Levning af Øienspalten, nemlig Macula lutea med Fovea coeca, og jeg er yderligere i mit nyligt udkomne Arbeide om Øiets Nethinde kommen til det Resultat, at Fovea coeca ikke blot er en Standsningsdannelse, men at den tillige er det mest defekte Sted i hele Nethinden, fordi N. opticus, Stratum granulosum og for en Del maaskee ogsaa Membrana intermedia mangle, og fordi Hjernecellernes Mængde er langt ringere midt i Fovea end udenom den, hvortil endnu for hele Maculas Vedkommende kan regnes den stærke Udvikling af den traadede Afdeling af Stratum

granulatum externum samt Maculas fastere Vedhængen til Chorioidea og dens gule Farve, der maaskee kunne betragtes som Attributer til Ardannelsen.

Det er imidlertid lykkedes mig hos Mennesket at finde nok en Levning af den foetale Øienspalte, som jeg har givet Navn af Funiculus scleroticæ. Naar man nøiagtigt båg Fovea coeca gjør et lodret Snit gennem Sclerotica, træffer man i dens Indre en solid Streng, som under en ret Vinkel eller noget skraat krydser sig med Scleroticas Traade, der i det hele forløbe koncentrisk med Øiet i flade, sammenvævede og plexusdannende Bundter; Strengen er paa Grund af dette Forløb og paa Grund af sin Farve og i Regelen ogsaa Tykkelse kjendelig for det blotte Øie og sædvanligt endnu lettere ved en Loupe.



Chorioidea.

Funiculus scleroticæ ($\frac{1}{51}$)

Naar man tænker sig Legemet i opreist Stilling, forløber Strengen i de allerfleste Tilfælde fortil, opad og udad gennem Sclerotica. Den er for det blotte Øie temmelig skarpt begrænset, og ved en svag Forstørrelse finder man, at Scleroticas Traade hefte sig paa dens Udside med afrundede Bundter, men deres Forløb afbrydes pludseligt, saa at man ikke kan forfølge samme Bundt paa begge Sider af Strengen. Den har en vis Tykkelse eller Brede, fordi man kan træffe den i flere, ved Siden af hverandre værende lodrette Snit; Tykkelsen er imidlertid noget forskjellig, i Almindelighed dog som en jævnt fin Sytraad. Strengens forreste Ende indad mod Øiets Indre bliver oftest noget tykkere og hænger med en bredere trompetformig Tilheftning temmelig fast til Udsiden af Chorioidea, fra hvilken den ikke uden med en vis Vold lader sig løsne; som bekjendt hænge ogsaa Nethinden, Pigment og Chorioidea nøiere sammen i Egnen af Macula lutea end andetsteds. Undertiden er denne Ende dreven halvkugleformigt i Veiret, eller der findes enkelte frie Trevler, som ere løsrevne fra Chorioidea. Strengens bageste Ende bliver ligeledes bredere især nedentil og taber sig efter et kortere eller længere Forløb i det Bindevæv, der bedækker Udsiden af Sclerotica; man kan træffe denne Ende hængende frit udenfor Sclerotica. Bredden af Strengens forreste og bageste Ende kan tiltage saa stærkt, at hele Strengen faaer en Timeglasform og er indkneben stærkt paa Midten; denne Form er ikke ualmindelig, og Strengen er i saadanne Tilfælde gjerne tykkere og bredere end ellers. Forresten er snart den forreste snart den bageste Ende stærkest udvidet. Sclerotica er sædvanligt udhulet saavel paa sin forreste som bageste Flade paa det Sted, hvor Strengen gaar igjennem, saa at den i sin Helhed bliver tyndere her. Imidlertid kan man dog ikke i Regelen med det blotte Øie finde Strengens Ender, naar man betragter Sclerotica fra Indsiden eller Udsiden. Kun undertiden er Strengens forreste Ende betegnet ved en lille flad Fordybning eller

Plade paa Scleroticas Indside og ved en fra Omgivelserne forskjellig, stærkere eller svagere Farve i Pigmentet sammesteds. Paa Scleroticas Udside er en Fordybning kun sjældent kjendelig paa det paagjældende Sted; undertiden er Fordybningen opflosset eller ru, medens Omgivelsen er glat; i et Øie var dette Forhold dog saa fremtrædende, at jeg med Sikkerhed udenfra kunde skjære lige ind paa Strengen.

Ved stærkere Forstørrelse finder man, at Strengen er fint sribet efter Længden og sammensat af Traade, der krydse sig med Scleroticas. Traadene ere meget fine og bløde, forløbe i let Slangegang eller bundtvis og ere bedækkede med temmelig talrige, smaa, kantede Kjerner; Traadene ere let at skjelne fra Scleroticas tykkere og stivere Traade. De hvile i en ensformig, hvidliggraa, fast og seig Masse, uden Masker saaledes som i Sclerotica, og lade sig kun meget vanskeligt skille ad.

Funiculus scleroticæ er konstant; jeg har undersøgt 50—60 menneskelige Øine af Voxne og Børn og aldrig savnet den. Man maa helst vælge Øine med tyk Sclerotica og gjør bedst i at hærde Øinene i fortyndet Chromsyre, i hvilken Tilstand man ogsaa lettere kan skjære tynde Snit; Strengen viser sig altid lysere og gjennemsigtigere paa saadanne Snit end Omgivelsen. Man finder den lettest, naar man stikker en meget fin Naal gjennem Fovea coeca (eller lidt til Siden for ikke netop at stikke gjennem Strengen, hvilket kan hænde) og ud gjennem Sclerotica og derpaa gjør lodrette Snit efter Maculas korteste Diameter, som er at foretrække for horizontale Snit. Ogsaa kan man veiledes af den mørke Pigmentplet paa Indsiden af Chorioidea bag Macula og finder undertiden Strengen lettere efter denne Fremgangsmaade, fordi Nethindens Fovea let kan forskyde sig, især naar der er dannet en saakaldet Plica centralis. Men selv i Tilfælde, hvor Nethinden er ødelagt eller Chorioidea allerede fjernet, kan man dog finde Strengen, naar man i en passende Afstand af 2—3 Mm. vedbliver at gjøre lodrette Snit

gjennem Sclerotica rundt om Indtrædelsen af Seenerven. Imidlertid hænder det ofte, at man paa lodrette Snit ikke faaer Strengen at see i dens hele Længde, men kun en Del af den, enten det midterste Parti eller en af Enderne. Dette beroer derpaa, at Snitfladen ikke er falden aldeles parallel med Strengens Retning; thi Strengen har kun en vis Tykkelse eller Brede, som i Forening med det ofte skraa eller buetformige Forløb kan bevirke, at man ofte ikke finder hele Strengen i et og samme Snit, men en Del deraf dækket af Scleroticas Traade og tilsyneladende tabende sig imellem dem; i det eller de paafølgende Snit kan man da finde Resten af Strengen.

Funiculus scleroticæ vil ikke kunne forvexles med nogen-
sommelst anden Dannelse i Sclerotica, navnlig ikke med gennem-
nemgaaende Kar og Nerver. I Omkredsen af Seenervens Ind-
trædelse især udad findes i Regelen en Mængde fine Aabninger
samlede i Form af to Halvbuer eller Trekanter, sandsynligvis
kun til Gjennemgang for Kar; undertiden forekomme flere Rækker,
undertiden er deres Antal kun ringe. I nogen Afstand fra
Funiculus findes en stor Aabning, hvorfra der paa Scleroticas
Indside udgaaer en Fure til Leie for Ciliarnerver og Ciliarkar;
men denne Aabning ligger mere til Siden, og det synes derfor
ikke rimeligt, at den har hørt til Øienspalten. Andre Aabninger
findes som bekjendt spredte over hele Sclerotica. Alle disse Aab-
ninger vise sig paa Gjennemsnit som runde eller ovale Huller
og ere paa deres Indside udklædte med sædvanlige i Slangeg-
ang forløbende Bindevævstraade; de afbryde ikke Traadens
Forløb i Sclerotica, men ere kun børede ind imellem dem. Aab-
ningerne indeholde Kar og Nerver; Karrenes runde eller ovale
Aabninger træffer man tomme eller fyldte med Blodlegemer,
derimod er der aldrig nogen solid Streng i disse Aabninger lig
Funiculus.

Uagtet Funiculus scleroticæ aldrig savnes, er den dog selv
i Øine af samme Subjekt underkastet forskellige Afvexlinger

saavel i Henseende til Styrke som Form og Forløb. Timeglasformen er allerede nævnt ovenfor. Forløbet er snart horizontalt lige fortil, snart mere skraat eller Sformigt bøiet eller i en opad convex Bue; engang gik den i en nedad convex Bue. Henimod Scleroticas Indside kan Strängen dele sig i to. I meget sjeldne Tilfælde er der 2 eller 3 tyndere eller ligesom rudimentaire Strengene ved Siden af eller over og under den normale; de følge ikke altid ganske den normales Retning, og to tyndere Strengene kunne under Forløbet forene sig til een. En enkelt Gang har jeg istedetfor en solid Streng truffet en hvirvelformig Anordning af Traadene, der syntes at hidrøre fra 2 eller 3 uregelmæssige Strengene. Endelig kan der selv hos Voxne findes Antydning til en Kardannelse i Strengens Indre.

Strengen har nemlig oprindeligt været permeabel og har indeholdt eet eller to Kar. Til Bevis herfor tjener for det første, at jeg i nogle Øine af Voxne paa meget tynde Snit af Strengen ved gennemgaaende Lys har kunnet see Levninger af et Kar, som var kjendeligt ved Væggens Doppelkontour og ved en meget fin tæt Tverstribning, men Karret selv var lukket. Dog maa man i saadanne Tilfælde ikke lade sig skuffe af Scleroticas paatvers forløbende Traade, som kunne skinne igjennem, men ere meget tykkere end de elastiske Tvertraade i et Kar. Dernæst kan der ligeledes hos Voxne foruden Strengen forekomme 2 eller 3 virkelige Kar henimod Udsiden af Sclerotica, hvor der samtidigt ogsaa kan findes en større Spalte, som dog ikke trænger dybere ind i Sclerotica. I Øine af nyfødte Børn har jeg fremdeles oftere i Strengens Ender kunnet see en Lysning, medens Strengen forresten var lukket, eller der kan ligesom hos Voxne findes aabne Kar ved Siden af den lukkede Streng; i et Øie af et 8 Aar gammelt Barn forekom ved Siden af den sig fortil trompetformigt bredende Ende tre saadanne Kar, hvoraf det ene viste sig som et tomt Hul, de to andre vare fyldte med Blodlegemer. Endelig har jeg i nogle Øine af

Nyfødte truffet hele Kanalen aaben; i et Tilfælde, hvor Funiculus var timeglasformig, og Sclerotica stødte til den med afrundede Sider, var der en tydelig Kanal i dens Indre, og et fint Kar strakte sig frit ind paa Scleroticas Indside; Funiculus, som tillige var temmelig bred, var paa sin Udside beklædt med Binde-vævstraade, der forløb i Slangegang, saaledes som det er Tilfældet med andre Aabninger for Kar og Nerver i Sclerotica. Forøvrigt forholde Aabningerne i Sclerotica omkring Seenervens Indtrædelse og andetsteds samt selve Funiculus sig hos Nyfødte i Almindelighed som hos Voxne; Funiculus kan være trompetformigt udvidet i Enderne eller være timeglasformig, eller Enderne dele sig fortil eller bagtil; flere finere Funiculi kunne træffes foruden Hovedstrengen, eller denne kan være lukket, medens de finere Kar endnu ere aabne; kun er Strengen undertiden noget vanskeligere at iagttage, naar Sclerotica i sin Helhed er tyndere. Alle de anførte Forskjelligheder hos Nyfødte og tildels ogsaa hos Voxne ere at henføre til et forskjelligt Standsningstrin i Dannelsen af Strengen, hvis oprindelige Hulhed lukker sig tidligere eller sildigere, men i Regelen allerede er lukket ved Fødselen; de ere af samme Natur som de Afvextlinger, der forekomme i Bygningen af Macula lutea med Fovea coeca og sandsynligvis ogsaa af Pigmentet, som bag Fovea vel i det hele altid er mørkere end andetsteds, men dog af forskjellig Styrke i forskjellige Øine undertiden endog i Øine af samme Subjekt. Det er uvist, om der finder noget bestemt Forhold Sted mellem den mørke Pigmentplet bag Fovea og Funiculus.

Foruden den oprindeligt af et gjennemgaaende Kar dannede, men senere lukkede Streng kan der ogsaa i den øvrige Sclerotica nærmest Strengen findes Spor af Øienspalten. Det er allerede ovenfor anført, at der hos Voxne lige bag Fovea paa Scleroticas Indside kan forekomme en svag Udhuling, og at Strengens bageste Ende i sjeldne Tilfælde ogsaa er antydet ved en Fordybning

paa Scleroticas Udside. Disse Forhold er endnu stærkere udprægede i Øine af Nyfødte. Ikke blot kan man her træffe lignende Fordybninger, men hele Strækningen fra Indtrædelsen af Seenerven og horizontalt udad henover Indtrædelsen af Funiculus kan være betegnet ved en Fure saavel paa Scleroticas indvendige som udvendige Side, og Sclerotica kan tydeligt være tyndere i hele den Strækning, hvor Øienspalten fra først af har været, hvilket sidste ikke er Tilfældet i Øine af Voxne. I et Øie af en Nyfødt var Scleroticas Bygning udad ligesom svampet paa det paagjældende Sted. Ammon (zur genaueren Kenntniss des N. opticus, namentlich dessen intraoculares Endes, Vierteljahrsschrift für die praktische Heilkunde, Prag 1860, 1, p. 135) er den, som først har gjort opmærksom paa, at Raphe Scleroticae undertiden kan holde sig gjennem hele Livet, skjøndt jeg ingen- sinde i det store Antal Øine, jeg har aabnet, har fundet den saa stærkt udtalet, som han afbilder den Fig. 2 og 3 paa Scleroticas Indside; paa Udsiden fandtes den ikke. I Coloboma oculi har jeg viist, at den stærkt fremtrædende Protuberantia sclerotalis, som paa Scleroticas Indside fremtræder som en dyb oval Grube, i Forening med Scleroticas Tyndhed paa dette Sted er en Følge af en Standsning i Øienspaltes Lukning (Om Øiets foetale Tilstand under Formen af Coloboma, i mine Bidrag til Øiets Anatomie, Physiologie og Pathologie 1850, p. 95, Tab. 3, Fig. 23).

Chorioidea, som er fastheftet til den indvendige Ende af Funiculus, frembyder i selve sin Substant neppe noget Spor af nogen Ardannelse eller Raphe; i Regelen er den saavel hos Voxne som hos Nyfødte noget tykkere i Retningen af Macula. Derimod kan der ofte i Karrenes Fordeling eftervises Spor af en Raphe. Naar man nemlig holder Chorioidea op for Lyset, seer man med det blotte Øie, at der findes en fjederformig Fordeling af Karrene saaledes, at der forløber en Stamme fra Seenervens Indtrædelse i Retning af Macula luteas længste Diameter

horizontalt udad i en Længde af 2—3 Linier, hvorpaa Karfordelingen længere udad fra fjederformig bliver vifteformig; de større Kar forgrene sig træformigt med en Raphe af smaa Kar i Midten. Naar man tørrer Chorioidea, fremtræder denne Raphe tydeligere, og Chorioidea revner lettere paa dette Sted end andesteds. Lige bag Fovea har jeg nogle Gange paa lodrette Snit truffet en eller to runde Aabninger af Kar, som altsaa løb tvers over den forreste Ende af Funiculus i Retning af Maculas horizontale Længdediameter. Ammon angiver kun i Almindelighed, at han ogsaa i Chorioidea, Retina og Processus ciliares har seet Levninger af Øienspalten (l. c. p. 135; see ogsaa hans *Entwickelungsgeschichte des menschlichen Auges*, Graefes Archiv für Ophthalmologie 1858, 4, p. 188, hvor han tillige som meget sjelden Dannelsesfeil omtaler en fin Aabning i Øiets forreste eller bageste Halvdel i Retningen af den tidligere Øienspalte).

Da Strengens forreste Ende er nøie forenet med Chorioidea, er det sandsynligt, at der før Fødselen har gaaet et eller to Kar gennem Sclerotica ind i Chorioidea paa det Sted, hvor denne efter al Rimelighed ogsaa har været spaltet, og paa Grund af Chorioideas nøiere Fasthængen til Fovea coeca er det endog rimeligt, at Karret er gaaet helt ind i Spaltens Fortsættelse i Fovea coeca og maaskee videre ind i Glaslegemet.

Af Aberne har jeg kun haft Leilighed til at undersøge Øinene hos tre Individer, *Cercopithecus fuliginosus*, *Macacus cynomolgus* og *nemestrinus*. I Alle viste der sig tydeligt Spor af den tidligere Spalte i Sclerotica, idet der i en Strækning af omtrent 2 Linier fra N. opticus horizontalt udad paa Indsiden eller Udsiden af Sclerotica eller paa begge Steder var en Fure, hvor Sclerotica var tyndere og gjennemsigtig, naar man holdt den op for Lyset; i eet Øie var den derimod fortykket i samme Strækning. Ved den udvendige Ende af Furen eller lidt til Siden fandtes Aabningen for et temmelig stort Kar, der gik meget skraat gennem Sclerotica, saa at dets Aabning paa

Scleroticas Udside laae $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$ Linie nærmere N. opticus end Aabningen paa dens Indside; flere mindre Kar kunde forekomme i eller nær Furen. Karrene vare aabne, fyldte med Blodkoagulum, og det større Kar var derfor endnu ikke omdannet til en solid Streng.

Ny Methode for Differentiation med hvilkesomhelst
Indices.

AF

F. Buchwaldt,

Capitain af Generalstaben.

Avec un Résumé français.

I. Methodens Grundprinciper.

Forord.

Liouville har i «Journal de l'école polytechnique, Cahier XXI, Pag. 1—186» i 3 paa hverandre følgende Afhandlinger fremstillet sin Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices. Methoden er baseret paa Formlen

$$\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m} = a^m e^{ax},$$

idet $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ betyder en Liouvillesk Differentiation, udført med Hensyn til x og med den vilkaarlige (positive, eller negative, hele, eller brudne) Index m . Der kan vel heraf udledes en almindelig Formel for $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$, som bliver udtrykt ved et bestemt Integral; men Formlen gjælder kun, naar $f(x)$ kan udvikles efter Potenser af e^x med negative Potensexponenter, (altsaa $f(\infty) = 0$). En Beregning af $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$ igjennem en Rækkeudvikling af $f(x)$ efter Potenser af e^x vil i Almindelighed være meget vanskelig. Derimod kan man, idet Liouville har fremstillet en simpel Formel

for $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$, gjældende for $m > n < 0$, og i Slutningen (Pag. 159—162) af sin 2den Afhandling paavist, hvorledes Formlen ved Hjælp af den «Complementære Function» kan bringes til Anvendelse for hvilket som helst Værdier af m og n , udvikle $f(x)$ i Række efter Potenser af x og differentiere denne Række. Der er desuagtet flere Omstændigheder, som gjøre, at Liouvilles Methode forekommer mig at være meget compliceret og at maatte i Anvendelserne medføre megen Usikkerhed. Den største Vanskelighed er vistnok den, at $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$ ikke altid har een bestemt og endelig Værdi, men kan, bortset fra den Complementære Function, have flere, ja endogsaa uendelig mange Værdier, saa at det i ethvert foreliggende Tilfælde gjælder om at finde den rette, α : den, der vedkommer Problemet. Dette følger allerede af Grundformlen, idet f. Ex. $\frac{\partial^{\frac{1}{6}} e^{ax}}{\partial x^{\frac{1}{6}}}$ har 6 Værdier. $\frac{\partial^m \cos ax}{\partial x^m}$ bliver (Pag. 119—124 osv.) ifølge Grundformelen $= a^m \cos \left(ax + \frac{m\pi}{2} \right)$, som for $m = \frac{1}{6}$ har 6 Værdier. Da imidlertid $\cos ax$ er $= \cos(-ax)$, bliver $\frac{\partial^m \cos ax}{\partial x^m}$ ogsaa $= (-1)^m a^m \cos \left(\frac{m\pi}{2} - ax \right)$, hvorved der for $m = \frac{1}{6}$ faaes i det Hele 12 Værdier; men dermed er man endda ikke færdig; thi man kan f. Ex. have $\cos ax = p \cos ax - (p - 1) \cos ax$, hvorved $\frac{\partial^m \cos ax}{\partial x^m}$ kan faae uendelig mange Værdier. Noget Lignende gjælder om $\frac{\partial^m \sin ax}{\partial x^m}$ og i mangfoldige andre Tilfælde, og Liouville bemærker (Pag. 124) selv herom: «Cette ambiguïté des valeurs des différentielles du sinus et du cosinus est en effect souvent embarrassante.»

En Ulempe af lignende Art forekommer mig at være den, at man for den endelige Række

$$\psi = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

vel kan have $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m} = 0$, men at $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m}$ ogsaa kan have andre Værdier. En Function $\sum A_\varepsilon \varepsilon^{-m} e^{\varepsilon x}$, hvori Potensexponenterne ε til e^x ere uendelig smaa (og Coefficienterne $A_\varepsilon \varepsilon^{-m}$ i Reglen uendelige) vil nemlig (Pag. 103—105) ved Rækkeudvikling kunne give en endelig Function ψ , idet $C_0 = \sum A_\varepsilon \varepsilon^{-m}$, $C_1 = \sum A_\varepsilon \frac{\varepsilon^{-m+1}}{1}$, \dots , og ved Differentiation med Index m efter Grundformlen faaes altsaa $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m} = \sum A_\varepsilon e^{\varepsilon x}$, som vil kunne blive $= 0$, naar Coefficienterne A_ε opfylde Betingelserne $\sum A_\varepsilon = 0$, $\sum A_\varepsilon \varepsilon = 0$, $\sum A_\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = 0, \dots$; men, naar disse Betingelser ikke ere opfyldte, vil $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m}$ ikke være $= 0$. Da imidlertid $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m}$ paa uendelig mange Maader kan blive $= 0$, saa er en Function af Formen ψ med arbitrære Coefficienter «Complementær Function til $\frac{\partial^{-m} f(x)}{\partial x^{-m}}$, eller, idet m er vilkaarlig og ikke indgaaer i ψ , til $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$. Jeg kan dog ikke se rettere, end at der hviler en Usikkerhed over denne Bestemmelse af den Complementære Functions Begreb, som maa kunne foraarsage Vanskelighed i Anvendelserne.

Ved at benytte den Complementære Function ψ med uendelige Værdier for Coefficienterne C_0, C_1, C_2, \dots , er det at Liouville, som foran bemærket, bliver i Stand til at finde $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$ for hvilket som helst Værdier af m og n . Den herved anvendte Fremgangsmaade kan — som jeg af Hr. Docent Lorenz er bleven gjort opmærksom paa — kort angives ved Formlen

$$\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = (-1)^m \frac{\gamma(m-n)}{\gamma(-n)} x^{n-m}$$

hvori γ er den Function, som jeg har indført i denne Afhandling og defineret ved Formlerne (3), (4) og (4)' i Forbindelse med (2), og som, naar a' betyder et positivt helt Tal, eller 0, giver $\gamma(-a') = \pm \infty$. Naar den nævnte Formel anvendes, bliver —

forudsat at $(m - a')$ ikke er $= 0$, eller negativ hel $-\frac{\partial^m x^{a'}}{\partial x^m}$ altid eller ikkun $= 0$; men denne Værdi følger, som foran bemærket, ikke ubetinget af Grundformlen, men kommer kun frem, naar man lader Coefficienterne i Rækkeudviklingen for $x^{a'}$ efter Potenser af e^x opfylde visse Betingelser. Vilde man f. Ex. sætte $x^{a'} = \left(\frac{e^{\varepsilon x} - e^{-\varepsilon x}}{2\varepsilon}\right)^{a'}$, saa vilde man ikkun faae $\frac{\partial^m x^{a'}}{\partial x^m} = 0$, naar $m > a'$, men $= \infty$, naar $m < a'$. Omvendt vil, naar n ikke er positiv hel, Formlen for $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$ aldrig give $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = 0$; men ved $x^n = \left(\frac{e^{\varepsilon x} - e^{-\varepsilon x}}{2\varepsilon}\right)^n$ giver Grundformlen $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = 0$, naar $m > n$, og $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = \infty$, naar $m < n$. Det synes mig derfor, om end Uoverensstemmelserne kunne hæves ved en uendelig Complementær Function, misligt i den samme Opgave at anvende Formlen for $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$ sammen med Grundformlen.

Vil man, som Prof. Kelland har gjort i en Afhandling i «Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1847», paa hvilken min Opmærksomhed først for nyligen er bleven henledet, lægge den anførte Formel for $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$ til Grund for Metoden, saa synes det mig, at man samtidig bør forlade Liouvilles Grundformel; thi den nye Grundformel, som iøvrigt ogsaa har den Ulempe at medføre flere Værdier for $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$, giver da, naar $(m - a')$ ikke er 0, eller negativ hel, ubetinget og ikkun $\frac{\partial^m x^{a'}}{\partial x^m} = 0$, saa at den Complementære Function bliver $\sum_{a'=0}^{a'=\infty} C_{a'} x^{a'}$, som ikke længere med Nødvendighed indeholder et endeligt og ubestemt Antal Led. Enhver Funktion, der kan udvikles efter Potenser af x med positive hele Exponenter (de almindeligste og simpleste Functioner), vil altsaa være en speciel Form af den Complementære Function. Da nu Form-

lerne for $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$ ikke i Almindelighed bør indeholde Led af af denne arbitrære Function, og da e^{ax} er en speciel Form af denne, forekommer det mig besynderligt at sætte $\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m} = a^m e^{ax}$;

thi $\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m}$ bør, synes det mig, ligesaa vel som $\frac{\partial^m \sum_{a'=0}^{\infty} C_{a'} x^{a'}}{\partial x^m}$, sættes

$= 0$. Prof. Kelland har rigtignok (Pag. 242—243) ført et Bevis for, at $\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m}$ bliver $= a^m e^{ax}$, og jeg maa tilstaae, at jeg, da jeg ikke forstaaer hans symbolske Betegnelser, ikke tør drage Rigtigheden af dette Bevis i Tvivl; men jeg antager, at han kommer til det nævnte Resultat netop ved Indførelsen af den specielle Complementære Function $a^m e^{ax}$; thi han finder først, ved at differentiere Rækken for e^{ax} efter den antagne nye Grundformel,

$$\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m} = (-a)^m \frac{\gamma(m)}{\gamma(0)} \left((ax)^{-m} + \frac{(ax)^{1-m}}{1-m} + \frac{(ax)^{2-m}}{(1-m)(2-m)} + \dots \right),$$

som forekommer mig at maatte være $= 0$ i alle Tilfælde, undtagen naar m er hel; thi $\gamma(0)$ er $= \pm \infty$, og Rækken indenfor Parenthesen er convergent for enhver Værdi af ax . — Kellands øvrige Udvikling har jeg heller ikke kunnet følge; men hans Grundlag forekommer mig ikke heldigere end Liouvilles, og hans derpaa byggede Methode er vistnok hverken letfattelig eller simpel i sine Resultater og Anvendelser. Kellands Formel (Pag. 244) for $\frac{\partial^m l x}{\partial x^m}$ er saaledes en Grænseformel, som ikke frembyder nogen Lighed med de tilsvarende bekjendte Formler for m positiv, eller negativ hel, saa at disse Formler kun paa en møisommelig Maade kunne udledes af den almindelige Formel. Kelland synes heller ikke at have taget tilstrækkeligt Hensyn til den Complementære Function.

Den Methode til Differentiation med hvilkesomhelst Indices, som i denne Afhandling vil blive fremstillet, og som under en

mindre fuldstændig Form tidligere har været offentliggjort i «Tidsskrift for Mathematik, 1875», synes mig at frembyde følgende Fordele:

$\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ faaer, ifølge Grundformlerne (5) og (5)', stedse kun een endelig Værdi. Denne Værdi bestemmes ved Formler, hvis Form er meget simpel, og som frembyde en iøinefaldende Lighed med de for positive og negative hele Differentiationsindices bekjendte Formler. «Complementet» er i ethvert givet Tilfælde let at bestemme, og Methoden, som er meget letfattelig og i det følgende Hovedafsnit II om Anvendelserne vil blive udførligere fremstillet, er i Stand til paa en særdeles simpel Maade at løse de samme og lignende Problemer som dem, der kunne løses ved Liouvilles Methode. — Jeg antager derfor, at min Methode i Reglen vil være at foretrække for Liouvilles, men betvivler dog ikke, at der undtagelsesvis kan existere Problemer, som løses lettere ved denne, navnlig naar en Rækkeudvikling efter Potenser af e^x skulde falde lettere end en Rækkeudvikling efter Potenser af x .

§ 1. For at undgaae Vidtløftighed, og for at Størrelsernes Art, uden nærmere Forklaring, kan fremgaae af Formlerne, ville vi i det Følgende stedse betegne et positivt helt Tal (eller 0) ved et lille latinsk Bogstav med et Mærke foroven (a' , b' , c' , ...) og en positiv ægte Brøk ved et lille græsk Bogstav (α , β , γ , ...). Er saaledes $m = m' + \mu$, da er $m > 0$, m' positiv hel eller 0 og $0 \leq \mu \leq 1$; er $m = -(m' + \mu)$, da er $m < 0$.

I det Følgende vil der ligeledes blive anvendt Betegnelserne « a » og $\gamma(a)$, hvilke Functioner det vil være nødvendigt at definere, forinden vi gaae over til den egentlige Fremstilling af Methoden.

« a », defineret ved

$$«a» = a(a-1)(a-2) \dots (-\infty), \quad (1)$$

er uendelig, eller ubestemt, men giver

$$\left. \begin{aligned} \frac{{}^{\text{«}a\text{»}}}{{}^{\text{«}a-k'\text{»}}} &= a(a-1)\dots(a-(k'-1)) \\ \frac{{}^{\text{«}a\text{»}}}{{}^{\text{«}a+k'\text{»}}} &= \frac{1}{(a+k')(a+k'-1)\dots(a+1)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\frac{{}^{\text{«}a\text{»}}}{{}^{\text{«}a \pm k'\text{»}}}$ er altsaa kun en ny, her hensigtsmæssigere, Betegnelse for den factorielle Function, af Graden $\mp k'$, tagen af a , hvilken ellers sædvanligen betegnes ved $[a]$.

I (1) og (2) kan a være saavel reel som imaginær $= (b + c\sqrt{-1})$, idet b og c ere reelle.

Ved Siden af Betegnelsen $\frac{{}^{\text{«}a\text{»}}}{{}^{\text{«}a \pm k'\text{»}}}$ vil der blive brugt Betegnelsen

$$[a'] = 1 \cdot 2 \dots a' = \frac{{}^{\text{«}a'\text{»}}}{{}^{\text{«}0\text{»}}}; [0] = 1.$$

Til Bestemmelse af Functionen $\gamma(a)$, hvis Indførelse i Formlerne vil være af stor Betydning for disses Simplification og Almengyldighed, haves for det Første:

$$\gamma(a) = (a-1) \cdot \gamma(a-1)$$

eller, ifølge (2)

$$\frac{\gamma(a)}{\gamma(a \pm k')} = \frac{{}^{\text{«}a-1\text{»}}}{{}^{\text{«}a \pm k'-1\text{»}}} \quad (3)$$

hvori a er reel, eller imaginær.

Det sees af (3), at, naar $y \leq z \leq y+1$, og i hele dette valgte reelle Interval $\gamma(z)$ er bekjendt, saa kan vel $\gamma(a)$, ifølge (3), for enhver reel Værdi af a udtrykkes ved $\gamma(z)$, idet ikkun k' maa vælges saaledes, at $a \pm k' = z$; men Formlen (3) er dog ikke tilstrækkelig til Bestemmelsen af $\gamma(a)$, idet $\gamma(z)$ er arbitrær. Gives derimod $\gamma(z)$ en bestemt Functionsform, der ikkun for Grændseværdierne y og $(y+1)$ maa tilfredsstille Betingelsen $\gamma(a) = (a-1) \gamma(a-1)$, saa vil $\gamma(a)$ for reelle Værdier af a være fuldstændigt bestemt; men ved et vilkaarligt Valg af Functionsformen for $\gamma(z)$ vil $\gamma(a)$ i Almindelighed blive discontinuert. Vi

ville derfor antage, at $z = \zeta$, altsaa $0 \leq \zeta \leq 1$, og at $\gamma(\zeta) = \Gamma(\zeta)$, det 2det Eulerske Integral, og det er da klart, at, naar $a > 0$, $\therefore a = a' + a$, saa vil $\gamma(a' + a)$, ifølge (3), blive paa samme Maade udtrykt ved $\gamma(\zeta) = \Gamma(\zeta)$, som $\Gamma(a' + a)$ udtrykkes ved $\Gamma(\zeta)$; $\gamma(a' + a)$ vil altsaa blive $= \Gamma(a' + a)$, saa at γ Functionen, tagen af en positiv reel Størrelse, er sammenfaldende med Γ Functionen, tagen af den samme Størrelse. $\gamma(a)$ vil da for reelle Værdier af a være fuldstændigt defineret ved (3) i Forbindelse med

$$\gamma(a' + a) = \Gamma(a' + a) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{a' + a - 1} dz \quad (4)$$

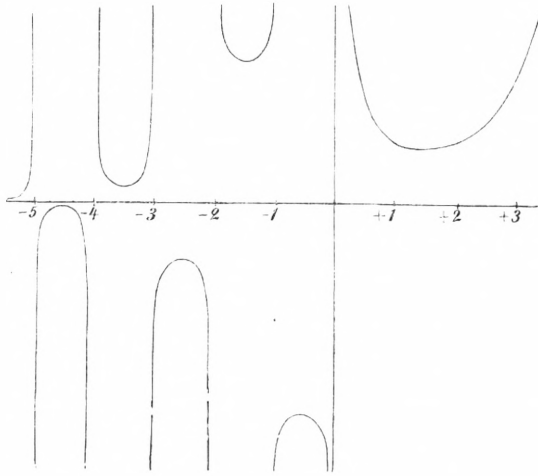
Da $\gamma(1) = \Gamma(1) = 1$, vil man faae $\gamma(0)$, $\gamma(-1)$, $\gamma(-2)$, ... $\gamma(-a')$, ... $= \pm \infty$, hvorimod Forholdet $\frac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')}$, ifølge (3), vil være endeligt, idet

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(-a')}{\gamma(-a' - k')} &= \frac{a - a' - 1}{a - a' - k' - 1} = (-a' - 1)(-a' - 2) \dots \\ &\dots (-a' - k') = (\div 1)^{k'} \frac{[a' + k']}{[a']}, \end{aligned}$$

eller

$$\frac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')} = \frac{(-1)^{b'} \cdot [b']}{(-1)^{a'} \cdot [a']}. \quad (a)$$

$\gamma(a' + a)$ vil være > 0 , hvorimod $\gamma(-a' - a)$ vil være < 0 , naar a' er et lige, og > 0 , naar a' er et ulige Tal. Grafisk fremstillet i et retvinklet Coordinatsystem, med a som Abscisse og $\gamma(a)$ som Ordinat, vil $\gamma(a)$ give Figuren



Udtrykt ved bestemt Integral bliver

$$\gamma(-a' - a) = \int_0^{\infty} \left(e^{-z} - \sum_{r'=0}^{r'=a'} \frac{(-1)^{r'}}{[r']} z^{r'} \right) z^{-a'-a-1} dz$$

som let ved delvis Integration vil findes at tilfredsstille Betingelserne (3) og (4).

Hidtil er $\gamma(a)$ ikkun bleven bestemt for reelle Værdier af a . Naar a derimod er imaginær $= (b + c\sqrt{-1})$, idet b og c ere reelle, saa kan $\gamma(a) = \gamma(b + c\sqrt{-1})$ ved Hjælp af Betingelsen (3), eller $\gamma(a) = (a-1)\gamma(a-1)$, først udtrykkes ved $\gamma(b' + \beta + c\sqrt{-1})$, hvori altsaa den reelle Del af $a = b' + \beta + c\sqrt{-1}$ er > 0 , og dernæst er $\gamma(b' + \beta + c\sqrt{-1})$ bestemt ved

$$\gamma(b' + \beta + c\sqrt{-1}) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{b'+\beta-1+c\sqrt{-1}} dz \quad (4)'$$

som er en almindeligere Form for (4) og tilfredsstiller (3); thi ved delvis Integration erholdes af (4)'

$$\gamma(b' + \beta + c\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{-z} z^{b'+\beta+c\sqrt{-1}}}{b' + \beta + c\sqrt{-1}} \right)_0^{\infty} + \frac{\gamma(b' + \beta + 1 + c\sqrt{-1})}{b' + \beta + c\sqrt{-1}};$$

$$\text{men } e^{-z} z^{b'+\beta+c\sqrt{-1}} = e^{-z} z^{b'+\beta} (\cos v + \sqrt{-1} \sin v),$$

hvori $v = lz^c$, forsvinder for $z = \infty$ og $z = 0$, saa at Formlen (4)' tilfredsstiller Betingelsen $\gamma(a) = (a-1) \cdot \gamma(a-1)$ og altsaa ogsaa (3).

En simpleere Bestemmelse af $\gamma(b + c\sqrt{-1})$ faaes ved

$$\begin{aligned} & \gamma(b + c\sqrt{-1}) \\ = & \gamma(b) - \gamma'(b) \frac{c^2}{1 \cdot 2} + \dots + \sqrt{-1} \left(\gamma'(b) \frac{c}{1} - \gamma'''(b) \frac{c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right), \end{aligned}$$

naar Rækkerne blive convergente. Iøvrigt vil det i Anvendelserne vistnok kun sjældent blive nødvendigt at beregne $\gamma(a)$ for imaginære Værdier af a .

§ 2. Med de valgte Betegnelser vil man nu for Differentiation med positive og negative hele Indices aabenbart have

$$\begin{aligned} \frac{d^{\pm m'} Cx^n}{dx^{\pm m'}} &= \int Cx^n dx^{\mp m'} = C \frac{{}^n n}{{}^n \mp m'} x^{n \mp m'} \\ &= C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n \mp m')} x^{n \mp m'} \quad (b) \end{aligned}$$

som er gjældende for alle Værdier af n , undtagen for dem, der gjøre $(1+n)$ negativ hel (eller 0) uden samtidigen ogsaa at gjøre $(1+n+m')$ negativ hel (eller 0). Formlen (b) viser sig altsaa kun ubrugelig (giver $\pm \infty$) ved nederste Tegn for m' (Integration), naar $n = -(1+n')$ og $m' = 1+n'+s'$, saa at den ikke kan bruges (uden Transformation) til Beregningen af

$$\int Cx^{-(1+n')} dx^{1+n'+s'}$$

Formlen (b) er en speciel Form af den særdeles simple Formel

$$\frac{d^m Cx^n}{dx^m} = C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} x^{n-m}, \quad (5)$$

og, da denne Formel — ved Siden af at indbefatte Differentiation med positive eller negative hele Indices som specielle Tilfælde — tillige opfylder den nødvendige Grundbetingelse, at Differentia-

tionsordenen skal være ligegyldig, eller at det i Resultatet alene skal komme an paa Summen m af de efterhaanden anvendte Differentiationsindices, saa lægges den til Grund for Differentiation med hvilket som helst Indices m (reelle eller imaginære).

At Differentiationsordenen i (5) er ligegyldig, ses deraf, at den giver

$$\frac{d^p}{dx^p} \cdot \frac{d^{m-p} Cx^n}{dx^{m-p}} = C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m+p)} \frac{d^p x^{n-m+p}}{dx^p} = \\ C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m+p)} \frac{\gamma(1+n-m+p)}{\gamma(1+n-m)} x^{n-m} = \frac{d^m Cx^n}{dx^m}.$$

Da $\gamma(-a') = \pm \infty$, men $\frac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')}$ endelig, vil (5) blive ubrugelig, naar $n = -(1+n')$ og samtidig $m \geq s' - n'$; men for disse Tilfælde vil man let af (5) kunne udlede en ligesaa simpel Formel (s. Formel (5)' i det Følgende), saa at man altsaa ved Hjælp af (5) og af den deraf afledede Formel (5)' vil kunne differentiere en hvilken som helst Function $f(x)$; thi man kan altid sætte

$$f(x) = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} A_{r'} x^{n_{r'}} \quad (c)$$

hvori $n_{r'}$ er et hvilket som helst Tal, naar der ingen Indskrænkning gjøres med Hensyn til Beskaffenheden af Coefficienterne $A_{r'}$, saa at man f. Ex. kan sætte $\lambda x = \lim_{\epsilon} \frac{x^\epsilon - x^{-\epsilon}}{2\epsilon}$.

Formlen (5) med den deri indgaaende γ Function indeholder saaledes et fuldkomment tilstrækkeligt Grundlag for Problemets hele Løsning. Man vilde kunne komme til denne Formel og til de af den følgende Resultater ad en ganske anden, skjøndt langt besværligere Vej end den her fremstillede.

§ 3. Til $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$, bestemt ved (5), eller deraf afledede Formler, maa dog adderes en arbitrær Function $\phi(m, x)$, som vi ville kalde Complementet til $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$, og som maa være af

den Beskaffenhed, at den forsvinder ved en Differentiation med Index $-m$. Formen af det saaledes definerede Complement kan let angives, idet (5) giver

$$\frac{d^{-m} x^{-(m+1)-r'}}{dx^{-m}} = \frac{\gamma(-m-r')}{\gamma(-r')} x^{-(1+r')} = 0 \quad (d)$$

undtagen naar $m = m'$, eller naar $-m = m' \leq r'$, \therefore
 $-(m+1) - r' = -(1+s')$, saa at man vil have

$$\left. \begin{aligned} \int x^{-(m+1)-r'} dx^{m'} &= \int x^{-(1+s')} dx^{m'} \geq 0 \\ \text{og} \quad \frac{d^{m'} x^{-(1+s')}}{dx^{m'}} &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (d')$$

Betegnes nu ved $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$ «den fuldstændige Differentialkoefficient med Index m af $f(x)$ med Hensyn til x », og ved $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ «den ufuldstændige Differentialkoefficient med Index m af $f(x)$ med Hensyn til x », haves

$$\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} = \frac{d^m f(x)}{dx^m} + \phi(m, x) \quad (A)$$

idet $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ faaes af Formlen (5), eller deraf afledede Formler, og $\phi(m, x)$ er «Complementet» til $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$.

Formen for Complementet $\phi(m, x)$ maa, ifølge (d), være

$$\phi(m, x) = x^{-m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \quad (B)$$

som giver $\frac{d^{-m} \phi(m, x)}{dx^{-m}} = 0$, eller

$$\frac{d^m \phi(-m, x)}{dx^m} = 0 \quad (e)$$

naar Beregningen udføres efter (5), eller efter de andre af denne i det Følgende udledede Formler for Differentiation med Und-

tagelse af (6) og (7), som kunne give $\frac{d^m \phi(-m, x)}{dx^m} =$ et Udtryk af Formen $\phi(m, x)$ med bestemte Coefficienter, afhængige af Coefficienterne i $\phi(-m, x)$ og af een arbitrær Constant.

De Led, der maatte findes i $f(x)$ af Formen $\phi(-m, x)$, ville altsaa ved Differentiationen $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ i (A) enten blive $= 0$, eller i hvert Fald kunne inddrages i det arbitrære Complement $\phi(m, x)$.

Ved fuldstændig Differentiation af (A) med Index $\div m$ skal man atter kunne faae

$$f(x) = \left\{ \frac{d^{-m}}{dx^{-m}} \left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} \right\} = \frac{d^{-m}}{dx^{-m}} \left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} + \phi_1(-m, x), \text{ eller}$$

$$f(x) = \frac{d^{-m}}{dx^{-m}} \frac{d^m f(x)}{dx^m} + \phi_1(-m, x) \quad (f)$$

Herved er det først, \circ : i (A), indførte arbitrære Complement $\phi(m, x)$ igjen forsvundet, hvorimod der i Stedet er indkommet et Complement $\phi_1(-m, x)$, som netop er $=$ de Led i $f(x)$ af denne Form, som ved den første Differentiation med Index m enten forsvandt, eller gik over i $\phi(m, x)$.

Det arbitrære Complement $\phi(m, x)$ i (A) vil kunne fuldstændigt bestemmes derved, at $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$ for visse Værdier af m og x skal opfylde givne Betingelser (antage givne Værdier). I enkelte Anvendelser, som f. Ex. den i (f), kan et Complement og dermed dets Bestemmelse falde bort; men der vil da, ligesom i (f), indtræde andre Complementer, som, ihvorvel de have en anden Betydning, dog kunne bestemmes ved givne Betingelser af den anførte Beskaffenhed.

Det arbitrære Complement $\phi(m, x)$ i (A) vil undertiden antage en meget simpel Form, f. Ex.

1) Naar $m = m'$, maa alle Coefficienterne C i $\phi(m', x)$ være $= 0$, da $\phi(m', x)$, ifølge den første (d)', ikke maa indeholde Potenser af x med negative hele Potensexponenter. Complementet $\phi(m'x)$ er altsaa $= 0$.

2) Naar $m = -m'$, kan ligeledes, ifølge den anden $(d)'$, $\phi(-m', x)$ ikke indeholde Potenser af x med negative hele Exponenter. Man faaer derfor i (B) $C_{m'} = C_{m'+1} = C_{m'+2} = \dots = 0$, saa at Complementet til $\int^{(m')}$ $f(x) dx^{m'}$ bliver

$$\phi(-m', x) = x^{m'-1} (C_0 + C_1 x^{-1} + \dots + C_{m'-1} x^{-(m'-1)}).$$

3) Naar $m = m' + \mu$, og det er givet, at $\left\{ \frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} \right\}$ ikke kan være uendelig for $x = 0$, saa maa, naar $\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}$ ikke bliver uendelig for $x = 0$, $\phi(m' + \mu, x)$ være $= 0$.

Indeholder derimod $\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}$ Led, der blive uendelige for $x = 0$, saa maa $\phi(m' + \mu, x)$ indeholde saadanne Led af (B), at $\phi(m' + \mu, 0)$ bringer hine Led i $\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}$ til at forsvinde for $x = 0$.

4) Naar $m = -(m' + \mu)$, og det er givet, at $\left\{ \frac{d^{-(m'+\mu)} f(x)}{dx^{-(m'+\mu)}} \right\} = \left\{ \int^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu} \right\}$ ikke kan være uendelig for $x = 0$, saa maa, naar $\int^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}$ ikke bliver uendelig for $x = 0$, Complementet have Formen

$$\phi(-(m' + \mu), x) = x^{m'+\mu-1} (C_0 + C_1 x^{-1} + \dots + C_{m'-1} x^{-(m'-1)}).$$

Indeholder derimod $\int^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}$ Led, der blive uendelige for $x = 0$, saa maa der til det ovenstaaende Udtryk for $\phi(-(m' + \mu), x)$ føjes saadanne Led af (B), at $\phi(-(m' + \mu), 0)$ bringer hine Led i $\int^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}$ til at forsvinde for $x = 0$.

§ 4. Naar i (5) $n = -(1 + n')$, faaes

$$\frac{d^m Cx^{-(1+n')}}{dx^m} = C \frac{\gamma(-n')}{\gamma(-n' - m)} x^{-(1+n')-m},$$

som kun kan give et brugeligt Resultat, naar $m = s' - n'$, hvorimod Formlen vil give $\pm \infty$, naar enten m er brudten, eller $m = -(1 + n' + s')$.

Efterat Formen af Complementet er bleven bestemt, ville vi dog nu kunne finde $\frac{d^m Cx^{-(1+n')}}{dx^m}$ ved Hjælp af (5), naar vi sætte

$$x^{-(1+n')} = \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2} \left(x^{-(1+n')+\varepsilon} + x^{-(1+n')-\varepsilon} \right).$$

Man har da

$$\begin{aligned} \frac{d^m x^{-(1+n')+\varepsilon}}{dx^m} &= \frac{\gamma(-n'+\varepsilon)}{\gamma(-n'-m+\varepsilon)} x^{-(1+n')-m+\varepsilon} = \\ &= \frac{''\varepsilon - (n'+1)''}{\varepsilon''\varepsilon - 1''} \frac{\gamma(1+\varepsilon)}{\gamma(-n'-m+\varepsilon)} x^{-(1+n')-m+\varepsilon}, \end{aligned}$$

og sættes heri, for Kortheds Skyld,

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= \frac{''\varepsilon - (n'+1)''}{\varepsilon''\varepsilon - 1''} \frac{\gamma(1+\varepsilon)}{\gamma(-n'-m+\varepsilon)}, \\ F(0) &= \frac{''- (n'+1)''}{''- 1''} \frac{1}{\gamma(-n'-m)} = \frac{\gamma(-n')}{\gamma(0)} \frac{1}{\gamma(-n'-m)} = \\ &= \frac{(-1)^{n'}}{[n'] \cdot \gamma(-n'-m)} \end{aligned} \quad (g)$$

saa haves

$$\begin{aligned} \frac{d^m x^{-(1+n')+\varepsilon}}{dx^m} &= \frac{x^{-(1+n')-m}}{\varepsilon} \cdot F(\varepsilon) x^\varepsilon = \\ \frac{x^{-(1+n')-m}}{\varepsilon} (F(0) + \varepsilon F'(0) + \dots) (1 + \varepsilon lx + \dots) &= \\ \frac{1}{\varepsilon} F(0) \cdot x^{-(1+n')-m} + F(0) \cdot x^{-(1+n')-m} lx + F'(0) \cdot x^{-(1+n')-m} + \dots \end{aligned}$$

som altsaa vil give

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{d^m x^{-(1+n')+\varepsilon}}{dx^m} + \frac{d^m x^{-(1+n')-\varepsilon}}{dx^m} \right) &= \frac{d^m x^{-(1+n')}}{dx^m} = \\ &= F(0) \cdot x^{-(1+n')-m} lx + F'(0) \cdot x^{-(1+n')-m}, \end{aligned}$$

men Complementet vil, ifølge (B), indeholde et Led $C_{n'} \cdot x^{-(1+m)-n'}$, eller, naar $m = -(1 + n' + s')$, et Led $C_{n'} \cdot x^{s'}$, saa at Ledet

$F'(0) \cdot x^{-(1+m)-n'}$ kan antages indbefattet i Complementet. Man faaer derfor $\frac{d^m x^{-(1+n')}}{dx^m} = F(0) \cdot x^{-(1+n')-m} lx$, eller, ifølge (g),

$$\frac{d^m Cx^{-(1+n')}}{dx^m} = \frac{(-1)^{n'} C}{[n'] \cdot \gamma(-n'-m)} x^{-(1+n')-m} lx \quad (5)'$$

hvor $m \geq s' - n'$.

Da (5)', ifølge (g) ogsaa kan skrives

$$\frac{d^m Cx^{-(1+n')}}{dx^m} = C \frac{\gamma(-n')}{\gamma(-n'-m)} x^{-(1+n')-m} \frac{lx}{\gamma(0)},$$

saa ses (5)' at fremstaae af (5), naar man multiplicerer det i (5) givne Udtryk for $\frac{d^m Cx^{-(1+n')}}{dx^m}$ med Faktoren $\frac{lx}{\gamma(0)}$.

Vi have saaledes i (5)' faaet et Supplement til (5), hvorved **enhver** Potens af x kan differentieres efter en meget simpel Formel.

Formlen (5)' verificeres let for Tilfældet $m = -(1+n'+s')$, som giver

$$\int Cx^{-(1+n')} dx^{1+n'+s'} = C \frac{(-1)^{n'}}{[n'] \cdot \gamma(1+s')} x^{s'} lx = C \frac{(-1)^{n'}}{[n'] [s']} x^{s'} lx,$$

og som, ved at differentieres $(1+n'+s')$ Gange, giver

$$\frac{d^{(s'+1+n')} Cx^{s'} lx}{dx^{s'+1+n'}} = (-1)^{n'} [n'] [s'] Cx^{-(1+n')}$$

ligesom ogsaa (5)', ifølge (f), ved at differentieres med Index $-m$, skal give uden Complement

$$\frac{d^{-m} Cx^{-m-(1+n')} lx}{dx^{-m}} = (-1)^{n'} [n'] \cdot \gamma(-n'-m) Cx^{-(1+n')}$$

eller, ved i Stedet for m at sætte $-(p+1+n')$,

$$\frac{d^{p+1+n'} Cx^p lx}{dx^{p+1+n'}} = (-1)^{n'} [n'] \cdot \gamma(1+p) Cx^{-(1+n')}, \quad (h)$$

dog maa det erindres, at p ikke kan være negativ hel, idet vi ere gaaede ud fra, at $m = -(p+1+n')$ ikke er $= s' - n'$.

Det vil af § 3 og især af den følgende § 9 være indlysende, at $\frac{d^m x^p lx}{dx^m}$ ikke kan findes med Complement $\phi(m, x)$ ved en Differentiation af (h) efter Formlen (5); thi sættes i (h) $n' = 0$, og differentieres derpaa med Index $m - (p + 1)$, faaes

$$\frac{d^m Cx^p lx}{dx^m} = C \frac{\gamma(1+p)}{\gamma(1+p-m)} x^{p-m} lx, \quad (i)$$

som vel er rigtig, men som fordrer et Complement:

$$\phi(m-p-1, x) \text{ og ikke } \phi(m, x).$$

$\frac{d^m x^p lx}{dx^m}$ maa derfor, naar $\frac{d^m x^p lx}{dx^m}$ skal have det til Differentiationsindex m svarende Complement $\phi(m, x)$, findes ved (5), eller deraf afledede Former, saaledes som det i den følgende § 8 vil blive vist.

§ 5. Det kan nu bevises, at

$$\begin{aligned} \int_a^{x} f(x) dx^{m'+\mu} &= \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_0^{x-a} t^{m'+\mu-1} f(x-t) dt, \end{aligned} \quad (6)$$

idet a er en vilkaarlig Constant, som i numerisk Henseende er $< x$. a kan altsaa ikke være $= \pm \infty$.

Formlen (6) giver for $\mu = 0$ en bekjendt Formel (Ramus, Side 76, Formel (95)'), hvorved et Integral af Ordenen m' reduceres til et Integral af 1ste Orden.

Naar Rigtigheden af (6) forudsættes bevist, havs

$$\begin{aligned} \int_a^{x} f(x) dx^{m'+\mu} &= \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_b^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt + \\ &+ \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_a^b (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt, \end{aligned} \quad (k)$$

hvori det sidste Integral ses, ifølge (B), at indeholde Led af Complementet $\psi(-m' + \mu, x)$. Formlen (6) er i denne Henseende væsentligt forskjellig fra (5) eller (5)', der ikke indeholde Led af Complementet. Det er ikkun, naar $f(x)$ er en saadan Function, at der gives en Konstant a , som gjør alle Integralerne $\int f(x) x^{r'} dx = 0$ for $x = a$, at (6) ikke vil indeholde noget Led af Complementet. Det sees let, at, naar i Rækkeudviklingen for $f(x)$ efter Potenser af x Potensexponenterne ere > -1 , altsaa $\lim_{\varepsilon} \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, vil $a = 0$ i (6) gjøre, at Formlen ikke kommer til at indeholde Led af Complementet, saa at, naar Rækken for $f(x)$ giver $\lim_{\varepsilon} \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, vil

$$\int_0^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu} = \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_0^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt \quad (6)'$$

ikke indeholde Led af Complementet.

Medens det altsaa ikkun er tilladt at sætte Udtrykkene for $\int_0^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}$ ifølge (6) og (5), eller (5)' ligestore, naar Complementet tilføies, saa kan man derimod, naar Rækken for $f(x)$ giver $\lim_{\varepsilon} \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, uden Tilføielse af Complement sætte $\int_0^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}$, beregnet efter (6)', ligt med $\int_0^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}$, beregnet ved (c) og (5).

Vi ville nu først bevise, at (6) gjælder, naar $\lim_{\varepsilon} \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, derved at Potensexponenterne i Rækken (c) for $f(x)$ ere > -1 . Det vil da for Bevisets Skyld være tilstrækkeligt i (6) at sætte $f(x) = x^{a'+\alpha-1}$, som giver

$$\begin{aligned} \int_0^{(m'+\mu)} x^{a'+\alpha-1} dx^{m'+\mu} &= \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_0^x (x-t)^{m'+\mu-1} t^{a'+\alpha-1} dt + \\ &+ \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_a^0 (x-t)^{m'+\mu-1} t^{a'+\alpha-1} dt, \end{aligned}$$

hvori det første Integral ikke indeholder noget Led af Complementet, saa at man, ifølge (5), skal have

$$\int_0^x (x-t)^{m'+\mu-1} t^{a'+\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(m'+\mu) \Gamma(a'+\alpha)}{\Gamma(m'+\mu+a'+\alpha)} x^{m'+\mu+a'-1}.$$

Sættes heri $t = xz$, $dt = xdz$, vil Betingelsen blive

$$\int_0^1 (1-z)^{m'+\mu-1} z^{a'+\alpha-1} dz = \frac{\Gamma(m'+\mu) \cdot \Gamma(a'+\alpha)}{\Gamma(m'+\mu+a'+\alpha)}; \quad (l)$$

men Integralet heri er Binets B -Function, for hvilken der findes den bekendte Relation (Steens Diff. og Integralregning S. 164)

$$B(m'+\mu, a'+\alpha) = \int_0^1 (1-z)^{m'+\mu-1} z^{a'+\alpha-1} dz = \frac{\Gamma(m'+\mu) \cdot \Gamma(a'+\alpha)}{\Gamma(m'+\mu+a'+\alpha)}$$

som netop er Betingelsen (l).

Det kan derefter bevises, at, naar (6) gjælder for $f(x)$, saa gjælder den ogsaa for $f'(x)$, altsaa for $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., saa at (6) vil gjælde for en hvilken som helst Function, idet dennes Rækkeudvikling efter Potenser af x da vil kunne indeholde Exponenter, der ere $> -r'$, eller $> -\infty$. Man faaer nemlig ved Differentiation af det sidste Udtryk i (6)

$$\frac{d \cdot \int_0^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}}{dx} = \frac{f(a)}{\Gamma(m'+\mu)} (x-a)^{m'+\mu-1} + \frac{1}{\Gamma(m'+\mu)} \int_0^{x-a} t^{m'+\mu-1} f'(x-t) dt,$$

som, hvis (6) ogsaa skal gjælde for $f'(x)$, maa, ifølge det sidste Udtryk i (6), fordrer som Betingelse

$$\frac{d \cdot \int_0^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}}{dx} = \frac{f(a)}{\Gamma(m'+\mu)} (x-a)^{m'+\mu-1} + \int_0^{(m'+\mu)} f'(x) dx^{m'+\mu},$$

der aabenbart er tilfredsstillet, idet $\frac{f(a)}{\Gamma(m'+\mu)} (x-a)^{m'+\mu-1}$, ifølge (B), kan indbefattes i Complementet til $\int_0^{(m'+\mu)} f'(x) dx^{m'+\mu}$.

Sættes $(1 - \mu)$ for $(m' + \mu)$ i (6), og differentieres derpaa $(m' + 1)$ Gange, faaes

$$\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} = \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d^{m'+1} \cdot \int_a^x (x-t)^{-\mu} f(t) dt}{dx^{m'+1}}, \quad (7)$$

og, naar Rækken for $f(x)$ giver $\lim \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, vil

$$\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} = \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d^{m'+1} \cdot \int_0^x (x-t)^{-\mu} f(t) dt}{dx^{m'+1}} \quad (7)'$$

ikke indeholde Led af Complementet $\phi(m' + \mu, x)$.

(7) giver altsaa Differentiation og (6) Integration af en hvilken-somhelst Funktion $f(x)$.

Ved Hjælp af (6) og (7), eller (5) og deraf afledede Formler, kan $f(x)$ bestemmes, naar man har givet

$$\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt = F(x), \text{ idet } F(x) \text{ er en bekjendt Function.}$$

Anm. Den til (6) svarende Formel hos Liouville er

$$\frac{\delta^{-(m'+\mu)} f(x)}{\delta x^{-(m'+\mu)}} = \frac{1}{\Gamma(m'+\mu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt,$$

der — som alt bemærket — ikkun gjælder, naar $f(x)$ kan udvikles efter Potenser af e^x med negative Exponenter ($f(\infty) = 0$). Denne Formel kan derfor, da de Functionsformer, for hvilke den gjælder, ere ganske specielle, kun have en temmelig begrænset Anvendelse. Saaledes synes f. Ex. ogsaa det bestemte Integral i denne Formel, dels paa Grund af de særegne Functionsformer, dels paa Grund af, at den lavere Grænse har den specielle Værdi ∞ , at maatte være mindre anvendeligt end Integralet i (6) til Løsningen af Problemer, der fordre en Bestemmelse af $f(x)$.

§ 6. Naar m er positiv, eller negativ hel, haves som bekjendt

$$\frac{d^m \cdot f_1(x) \cdot f_2(x)}{dx^m} = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']} \frac{{}^m m}{m-r'} f_1^{(r')}(x) \frac{d^{m-r'} f_2(x)}{dx^{m-r'}}, \quad (8)$$

og det kan bevises, at denne Formel gjælder for hvilket som helst Værdier af m . Da (8) beholder sin Form uforandret ved at differentieres p' Gange, idet da kun $(m + p')$ træder i Stedet for m , vil det være tilstrækkeligt at bevise, at den gjælder for $m < 0$; thi den vil da ogsaa gjælde for $(m + p')$, der, naar $p' > -m$, vil være > 0 .

Sættes da i (8) $m = -(m' + \mu)$, faaes, ifølge (6),

$$\begin{aligned} & \int_1^{(m'+\mu)} f_1(x) \cdot f_2(x) dx^{m'+\mu} = \\ & = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']} \frac{{}^{\alpha-(m'+\mu)}_{\alpha-(m'+\mu)-r'}}{{}^{\alpha-(m'+\mu)-r'}} f_1^{(r')}(x) \int_2^{(m'+r'+\mu)} f_2(x) dx^{m'+r'+\mu} = \\ & \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']} \frac{{}^{\alpha-(m'+\mu)}_{\alpha-(m'+\mu)-r'}}{{}^{\alpha-(m'+\mu)-r'}} f_1^{(r')}(x) \frac{1}{\gamma(m'+\mu+r')} \int_a^x (\tilde{x}-t)^{m'+\mu-1+r'} f_2^{(r')}(t) dt \\ & \text{eller, ifølge (3),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^{(m'+\mu)} f_1(x) \cdot f_2(x) dx^{m'+\mu} = \\ & \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f_2(t) \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']} \frac{{}^{\alpha-(m'+\mu)}_{\alpha-(m'+\mu)-r'}}{{}^{\alpha-(m'+\mu)-r'}} \frac{{}^{\alpha m'+\mu-1}_{\alpha m'+\mu-1+r'}}{(x-t)^{r'}} f_1^{(r')}(x) dt, \end{aligned}$$

som, da $\frac{{}^{\alpha-(m'+\mu)}_{\alpha-(m'+\mu)-r'}}{{}^{\alpha-(m'+\mu)-r'}} \frac{{}^{\alpha m'+\mu-1}_{\alpha m'+\mu-1+r'}}{{}^{\alpha m'+\mu-1+r'}} = (-1)^{r'}$, og da

$$f_1(t) = f_1(x - (x - t)) = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (-1)^{r'} \frac{(x-t)^{r'}}{[r']} f_1^{(r')}(x),$$

giver Betingelsen

$$\int_1^{(m'+\mu)} f_1(x) \cdot f_2(x) dx^{m'+\mu} = \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f_1(t) \cdot f_2(t) dt$$

der er opfyldt ifølge (6), saa at (8) gjælder for hvilket som helst Værdier af m og for hvilket som helst Functioner, der gjøre Rækken convergent. At dette ikke altid kan være Tilfældet, endskjøndt Rækken (8) i formel Henseende altid er rigtig, er indlysende. Sættes f. Ex. i (8) $m = -1$, faaes en Række, der vel er formelt rigtig og kan erholdes direkte ved delvis Integration af $\int f_1(x) f_2(x) dx$, men som dog ikke altid er

convergent, idet f. Ex. $f_2(x) = 1$ og $f_1(x) = x^{-1-a'-a}$ vil gjøre Rækken divergent.

For at komme til et bestemtere Resultat i denne Henseende ville vi forestille os $f_1(x)$ og $f_2(x)$ udviklede efter Potenser af x og i de enkelte Led af (8) differentierede efter (5). Man kan da undersøge, hvorvidt Coefficienterne til de forskjellige Potenser af x i $\frac{d^m f_1(x) f_2(x)}{dx^m}$ lade sig bestemme. For i Almindelighed at undersøge dette vil det være tilstrækkeligt i (8) at sætte $f_1(x) = x^p$ og $f_2(x) = x^n$, som giver $f_1^{(r')}(x) = \frac{{}^a p}{{}^a p - r'}$ og

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-r'} f_2(x)}{dx^{m-r'}} &= \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m+r')} x^{n-m+r'} = \\ &= \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} \frac{{}^a n - m}{{}^a n - m + r'} x^{n-m+r'} \end{aligned}$$

altsaa

$$\begin{aligned} \frac{d^m x^{p+n}}{dx^m} &= x^{p+n-m} \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{{}^a r'} \frac{{}^a m}{{}^a m - r'} \frac{{}^a p}{{}^a p - r'} \frac{{}^a n - m}{{}^a n - m + r'} = \\ &= x^{p+n-m} \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} u_{r'}. \end{aligned}$$

Heri lader nu $\sum_{r'=0}^{r'=\infty} u_{r'}$ sig beregne enten, naar Rækken bliver endelig (hvilket vil ske, naar enten $m = m'$, eller $p = p'$), eller naar Rækken er uendelig og convergent, \therefore naar

$$\text{Lim. } r' \left(\frac{u_{r'}}{u_{r'+1}} - 1 \right) = \text{Lim. } r' \left(\frac{(r'+1)(n-m+r'+1)}{(m-r')(p-r')} - 1 \right) > 1,$$

altsaa naar $n+p > -1$.

I disse 3 Tilfælde maa man da, ifølge (5), have

$$\sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{{}^a r'} \frac{{}^a m}{{}^a m - r'} \frac{{}^a p}{{}^a p - r'} \frac{{}^a n - m}{{}^a n - m + r'} = \frac{\gamma(1+n-m)}{\gamma(1+n)} \frac{\gamma(1+n+p)}{\gamma(1+n+p-m)}, \quad (n)$$

Af denne Undersøgelse følger da, at Rækken (8) i følgende 3 Tilfælde i Almindelighed vil blive convergent:

1) Naar $m = m'$.

2) Naar $f_1(x)$ kan udvikles efter Maclaurins Formel ($f_2(x)$ kan da være en hvilken som helst Function).

3) Naar $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon f_1(\varepsilon) \cdot f_2(\varepsilon) = 0$.

Det 2det af disse Tilfælde er tilstede ved den bekjendte Anvendelse (Ramus, S. 232), der kan gjøres af (8) — hvilken Formel ogsaa følger af Liouvilles Methode — til at reducere en lineær Differentialligning, hvori Coefficienten til $\frac{d^{p'}y}{dx^{p'}}$ er en hel Function af x af Graden p' , til en lineær Ligning af een Orden lavere, i hvilken Ligning dog Coefficienten til $\frac{d^{p'}u}{dx^{p'}}$ bliver af Graden $(p' + 1)$.

§ 7. Formlen (8) kan benyttes til at udtrykke $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ ved $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., idet man i (8) kan sætte $f_2(x) = 1$. Formlerne (5) og (3) give nemlig

$$\frac{d^m C}{dx^m} = \frac{C}{\gamma(1-m)} x^{-m} \quad (6)$$

$$\frac{d^{m-r'} C}{dx^{m-r'}} = \frac{C}{\gamma(1-m+r')} x^{-m+r'} = \frac{C}{\gamma(1-m)} \frac{{}^{m-m}}{m+r'} x^{r'-m}.$$

Sættes altsaa i (8) $f_2(x) = 1$, og bemærkes, at, ifølge (2) og (3),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma(1-m)} \frac{{}^m}{m-r'} \frac{{}^{m-m}}{m+r'} &= \frac{-m}{\gamma(1-m)} \cdot \frac{(-1)^{r'}}{r'-m} = \\ &= \frac{1}{\gamma(-m)} \cdot \frac{(-1)^{r'}}{r'-m}, \end{aligned}$$

faaes

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} = \frac{1}{\gamma(-m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (-1)^{r'} \frac{x^{r'-m}}{(r'-m)[r']} f^{(r')}(x). \quad (9)$$

I Stedet for $\frac{1}{r'-m}$ kan sættes $\frac{\gamma(r'-m)}{\gamma(1+r'-m)}$, og det ses, at, naar $m = m'$, vil Rækken (9) reduceres til det Led, for hvilket $r' = m'$, og som giver

$$\frac{d^{m'} f(x)}{dx^{m'}} = (-1)^{m'} \frac{\gamma(0)}{\gamma(-m')} \frac{1}{[m']} f^{(m')}(x)$$

eller, ifølge (a), $\frac{d^{m'} f(x)}{dx^{m'}} = f^{(m')}(x)$.

Iøvrigt vil Rækken (9), ifølge det i Slutningen af § 6 anførte, i Almindelighed blive convergent, naar $\lim \varepsilon f(\varepsilon) = 0$.

Er saaledes $f(x) = x^{-1+a'+\alpha}$, faaes af (9) og (5)

$$\sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{(r'-m) \cdot [r']} \frac{«a' + \alpha - 1»}{«a' + \alpha - 1 - r'»} = \frac{\gamma(a' + \alpha) \cdot \gamma(-m)}{\gamma(a' + \alpha - m)}. \quad (p)$$

Ligesom (p) er en speciel Form af (n), saaledes er igjen (l) en speciel Form af (p), idet jo højre Side af (9) er = højre Side af (6), naar $m = -(m' + \mu)$.

§ 8. Blandt de forskjellige Udtryk, der, ifølge det Foregaaende, kunne erholdes for $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ ved Hjælp af Formlerne (5), (5)', (6), (6)', (7), (7)', (8) og (9), ville — med tilbørligt Hensyn til de tidligere anførte Betingelser — de, der kunne bestemmes ved Hjælp af (5), (5)', (6)', (7)' og (9) saavel som af (8), naar i denne $\frac{d^{m-r'} f_2(x)}{dx^{m-r'}}$ paa samme Maade beregnes ved en af de sidstnævnte Formler, ikke indeholde Led af Complementet, og de kunne derfor sættes indbyrdes lige store. Ved en saadan Combination af forskjellige Udtryk for $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ vil man i mange Tilfælde kunne erholde interessante Resultater. Exempler paa saadanne Combinationer haves saaledes i Formlen (n) med dens specielle Former (p) og (l). Vi skulle indskrænke os til endnu i to simple Exempler at paavise denne Anvendelse af Methoden, idet vi i Ex. 1 ville kombinere 2 forskjellige Udtryk for $\frac{d^m e^{ax}}{dx^m}$ for derved blandt Andet at vise, at Methoden — hvad der jo forøvrigt er umiddelbart indlysende — maa føre til et andet Resultat end det, der danner Grundlaget for Liou-

villes Methode, medens vi i Ex. 2 ville combinere forskjellige Udtryk for $\frac{d^m x^n lx}{dx^m}$ og derved tillige erholde nogle særdeles simple Relationer for Functionen $\gamma'(a)$, der jo vel er fuldstændig bestemt ved $\gamma(a)$, men hvis Hovedegenskaber det dog ved Anvendelserne af Methoden vil være nødvendigt at kjende.

Ex. 1. $f(x) = e^{ax}$ giver, indsat i (9),

$$\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} = \frac{e^{ax}}{\gamma(-m)} \cdot \sum_{p'=0}^{p'=\infty} (-1)^{p'} \frac{a^{p'} x^{p'-m}}{(p'-m) \cdot [p']}. \quad (9)$$

(5) giver for $e^{ax} = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{a^{r'} x^{r'}}{[r']}$

$$\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} = \frac{1}{\gamma(-m)} \cdot \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{a^{r'} x^{r'-m}}{[r'-m]} a^{r'} x^{r'-m}. \quad (9)'$$

Disse to Udtryk ere lige store, og Coefficienten til $x^{r'-m}$ i begge Udtryk giver derfor Relationen

$$\sum_{p'=0}^{p'=r'} \frac{(-1)^{p'}}{(p'-m) \cdot [p'] \cdot [r'-p']} = \frac{a^{-r'-m}}{[r'-m]} = \frac{1}{(r'-m)(r'-1-m)\dots(1-m)(-m)}, \quad (r)$$

som let verificeres.

$$\text{Ex. 2. Sætter man } lx = \lim_{\varepsilon} \frac{x^\varepsilon - x^{-\varepsilon}}{2\varepsilon}, \quad x^n lx = \lim_{\varepsilon} \frac{x^{n+\varepsilon} - x^{n-\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

saa giver (5), ved en Fremgangsmaade, analog med den, ved hvilken (5)' udledes af (5),

$$\frac{d^m x^n lx}{dx^m} = \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} x^{n-m} \left(lx + \frac{\gamma'(1+n)}{\gamma(1+n)} - \frac{\gamma'(1+n-m)}{\gamma(1+n-m)} \right) \quad (10)$$

som har megen Lighed med (5) og (5)' og giver $\frac{d^m x^n lx}{dx^m}$ under endelig Form, men udtrykt ved γ' -Functionen. (10) viser, at Udtrykket for $\frac{d^m x^n lx}{dx^m}$ i (i) maa — aaledes som det der er bemærket — completeres ved et andet Complement end det, der tilsyneladende fordredes af Differentiationsindexen.

Sættes i (8) $f_1(x) = lx$ og $f_2(x) = x^n$, faaes

$$\frac{d^m x^n lx}{dx^m} = \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} x^{n-m} \left(lx - \sum_{r'=1}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{r'} \frac{[m]}{[m-r']} \frac{[n-m]}{[n-m+r']} \right), \quad (10)'$$

som er convergent, naar $m = m'$, eller naar $n > -1$. Under een af disse Forudsætninger ere Udtrykkene (10) og (10)' lige store. $m = 1$ skal derfor give

$$\frac{dx^n lx}{dx} = nx^{n-1} \left(lx + \frac{\gamma'(1+n)}{\gamma(1+n)} - \frac{\gamma'(n)}{\gamma(n)} \right) = nx^{n-1} \left(lx + \frac{1}{n} \right)$$

eller

$$\frac{\gamma'(1+a)}{\gamma(1+a)} - \frac{\gamma'(a)}{\gamma(a)} = \frac{1}{a}, \quad (s)$$

hvis Rigtighed vil fremgaae af (3), naar man deri sætter $k' = 1$ og differentierer med Hensyn til a .

Af (s) eller (3) faaes

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma'(a+k')}{\gamma(a+k')} &= \frac{\gamma'(a)}{\gamma(a)} + \sum_{r'=0}^{r'=k'-1} \frac{1}{a+r'} \\ \frac{\gamma'(a-k')}{\gamma(a-k')} &= \frac{\gamma'(a)}{\gamma(a)} - \sum_{r'=1}^{r'=k'} \frac{1}{a-r'} \end{aligned} \right\} \quad (3)'$$

hvori man ved Hjælp af (3) kunde bortskaffe $\gamma(a+k')$ og $\gamma(a-k')$.

Ved (3)' kan nu igjen (10) verificeres for Tilfældene $m = \pm m'$, idet man faaer

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^{m'} x^n lx}{dx^{m'}} &= \frac{{}^{\circ}n}{{}^{\circ}n - m'} x^{n-m'} \left(lx + \sum_{r'=0}^{r'=m'-1} \frac{1}{n-r'} \right) \\ \int x^n lx \cdot dx^{m'} &= \frac{{}^{\circ}n}{{}^{\circ}n + m'} x^{n+m'} \left(lx - \sum_{r'=1}^{r'=m'} \frac{1}{n+r'} \right), \end{aligned} \right\} \quad (t)$$

om hvilke Formlers Rigtighed man let vil kunne overbevise sig.

Sættes i (10) og (10)' $n = 0$ og $m = 1 - a$, faaes

$$\frac{\gamma'(a)}{\gamma(a)} = \gamma'(1) - (1-a) \sum_{r'=1}^{r'=\infty} \frac{1}{r'(r'-1+a)}. \quad (u)$$

Ligesom (a) giver et Udtryk for $\frac{\gamma'(-a')}{\gamma'(-b')}$, saaledes vil man ogsaa for $\frac{\gamma'(-a')}{\gamma'(-b')}$ kunne finde ganske det samme Udtryk. Man har nemlig af (10)', eller af (t)

$$\frac{d^{1+a'} lx}{dx^{1+a'}} = (-1)^{a'} [a'] x^{-1-a'}$$

og sættes derfor i (10) $n = 0$ og $m = 1 + a'$, faaes Formlen

$$\frac{\gamma'(-a')}{(\gamma'(-a'))^2} = (-1)^{1+a'} [a'] \tag{11}$$

som i Forbindelse med (a) giver den simple Relation

$$\frac{\gamma'(-a')}{\gamma'(-b')} = \frac{\gamma'(-a')}{\gamma'(-b')} = \frac{(-1)^{b'} [b']}{(-1)^{a'} [a']} = \frac{(-1)^{b'} \gamma'(1+b')}{(-1)^{a'} \gamma'(1+a')} \tag{12}$$

I Analogie med de af Formlerne (8) og (9) udledede Formler (n) og (p) for visse Rækkers Summation faaes af (10) og (10)' Formlen

$$\sum_{r'=1}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{r'} \frac{m}{m-r'} \frac{n-m}{n-m+r'} = \frac{\gamma'(1+n-m)}{\gamma'(1+n-m)} \frac{\gamma'(1+n)}{\gamma'(1+n)}, \tag{v}$$

som er gjældende, naar enten $m = m'$, eller naar $n > -1$.

Som Exempler paa de mere specielle Resultater, der kunne udledes heraf, mærkes

$$\begin{aligned} m' \sum_{r'=1}^{r'=\infty} \frac{1}{r'(m'+r')} &= [m'] \sum_{r'=1}^{r'=m'} \frac{(-1)^{r'+1}}{r' [r'] [m'-r']} = \sum_{r'=1}^{r'=m'} \frac{1}{r'} \\ &= \frac{\gamma'(1+m')}{\gamma'(1+m')} - \gamma'(-1) \end{aligned} \tag{v}'$$

som erholdes ved i (v) at sætte først $n = m = m'$ og derpaa $n = 0$ og $m = -m'$ samt ved endeligen i den 1ste (3)' at sætte $a = 1$ og $k' = m'$.

§ 9. Om Complementet. Ligesom man med den i § 3 brugte Betegnelse for en fuldstændig (o: completeret) Differentiation skal kunne faae

$$\left\{ \frac{d^{-m}}{dx^{-m}} \left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} \right\} = f(x),$$
 saaledes maa man mere almindeligt kunne have

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ \frac{d^{m_2}}{dx^{m_2}} \left\{ \frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}} \right\} \right\} = \left\{ \frac{d^{m_1+m_2}}{dx^{m_1+m_2}} f(x) \right\} \\ &\dots \\ &\left\{ \frac{d^{m_{i'}}}{dx^{m_{i'}}} \dots \left\{ \frac{d^{m_2}}{dx^{m_2}} \left\{ \frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}} \right\} \right\} \dots \right\} = \left\{ \frac{d^{m_1+m_2+\dots+m_{i'}}}{dx^{m_1+m_2+\dots+m_{i'}} f(x) \right\} \end{aligned} \right\} \tag{w}$$

Hjvad enten de successive Differentiationer med Indices $m_1, m_2, \dots, m_{i'}$ ere udførte efter den ene, eller den anden af Formlerne (5) til (10), ville de til hver Differentiation hørende Complementer $\phi_1(m_1, x)$, $\phi_2(m_2, x), \dots, \phi_{i'}(m_{i'}, x)$ alle kunne tænkes bestemte derved, at $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$ for visse Værdier af m og x skal opfylde givne Betingelser (antage givne Værdier). Med Hensyn til den Maade, hvorpaa Complementerne bestemmes, er der altsaa ingen Forskjel imellem dem; men deres Fremkomst skyldes desuagtet forskjelligartede Aarsager. Hvis Differentiationen med Index m_1 havde været foretaget efter (6), eller (7), kunde man tænke sig de herved muligen fremkomne Led af Formen $\phi(m_1, x)$ inddragne i det arbitrære Complement $\phi_1(m_1, x)$; ligeledes kunde alle Led af Formen $\phi(m_2, x)$, fremkomme ved Differentiationen med Index m_2 , tænkes inddragne i Complementet $\phi_2(m_2, x)$, osv. Vi ville derfor for Simpelheds Skyld foreløbig antage, at alle Differentiationerne i (w) ere foretagne, ikke efter (6), eller (7), men efter en af de andre Formler f. Ex. efter (5), idet denne Antagelse ikke i nogen væsentlig Grad vil influere paa det, som vi her ville undersøge, nemlig den forskjelligartede Nødvendighed af Forekomsten af Complementet $\phi_1(m_1, x)$ og af Complementerne $\phi_2(m_2, x), \dots, \phi_{i'}(m_{i'}, x)$, en Undersøgelse, der iøvrigt — som foran bemærket — for Anvendelserne er uden Betydning.

Det vil da af Indentiteterne (w) sees, at der i dem paa hver Side af Lighedstegnet kun kan være eet fuldstændigt arbitrært almindeligt Complement, nemlig paa høire Side det til Differentiationsindex $(m_1 + m_2 + \dots, m_{i'})$ svarende Complement $\phi_{1,2,\dots,i'}(m_1 + m_2 + \dots, m_{i'}, x)$ og paa venstre Side det til den første Differentiationsindex m_1 svarende Complement $\phi_1(m_1, x)$, differentieret efterhaanden med alle de følgende Indices $m_2, \dots, m_{i'}$, saa at man faaar

Er f. Ex. $\phi_{(1)}(-m_1, x) = Ax^{m_1-1-r'}$, bliver $\phi_2(m_2, x) = A \frac{\gamma(m_1, -r')}{\gamma(-m_2, -r')} x^{-m_2-1-r'}$, og er $m_2 = -m_1$, faaes, ligesom i § 3 anført, $\phi_2(m_2, x) = \phi_{(1)}(-m_1, x) = \phi_{(1)}(m_2, x)$.

Om Rigtigheden af (y) vil man let kunne overbevise sig ved at give $f(x)$ den i (y) anførte Form og udføre de i Betingelserne (w) paa hver Side af Lighedstegnet antydede Regninger.

I Resultatet $\left\{ \frac{d^{m_1+m_2+\dots+m_{i'}}}{dx^{m_1+m_2+\dots+m_{i'}}} f(x) \right\}$ ville altsaa Ledene af Formen $\phi(m_2+\dots+m_{i'}, x)$ være $= \frac{d^{m_3+\dots+m_{i'}}}{dx^{m_3+\dots+m_{i'}}} \phi_2(m_2, x), \dots$.
Ledene af Formen $\phi(m_{i'}, x)$ være $= \phi_{i'}(m_{i'}, x)$.

Er Resultatet $f(x)$, saa er $m_1 + m_2 + \dots + m_{i'} = 0$, og $\phi_{1,2,\dots,i'}(m_1 + m_2 + \dots + m_{i'}, x) = 0$, saa at, ifølge den sidste (x), Bestemmelsen af $\phi_1(m_1, x)$ af sig selv falder bort.

Er Resultatet $f(x)$ **umiddelbart** givet, da ere de andre Complementer $\phi_2, \dots, \phi_{i'}$ bestemte ved (y).

Er Resultatet $f(x)$ givet **implicite** ved Betingelsesligninger af sædvanlig Form (f. Ex. Differentialligninger af hel Orden), saa maa $\left\{ \frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}} \right\}$ først findes, hvilket f. Ex. kunde tænkes udført netop ved Hjælp af de givne Ligninger, efterat disse vare differentierede med en Index m saaledes beskaften, at Ligningerne derved bragtes paa en, med Hensyn til Bestemmelsen af $\left\{ \frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}} \right\}$, simplere Form. Complementerne $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{i'}$ bestemmes da ved Indsættelsen af $\left\{ \frac{d^{m_{i'}}}{dx^{m_{i'}}} \dots \left\{ \frac{d^{m_2}}{dx^{m_2}} \left\{ \frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}} \right\} \right\} \dots \right\} = f(x)$ i de givne Betingelsesligninger. Herved faaes alle ubekjendte Constante bestemt, idet der ikkun vil kunne forblive saa mange arbitrære Constante tilbage, som der ifølge de givne Betingelsesligninger skal være i $f(x)$.

Naar ved de i (w) foretagne Differentiationer Formlerne (6)

og (7) have været benyttede, vil den foran fremstillede Betydning af de forskjellige Complementer kunne undergaae en simpel Modification; men en nærmere Betragtning deraf vil her neppe være nødvendig.

I de hyppigste Anvendelser vil, naar $f(x)$ er det søgte Resultat, i' være $= 2$, altsaa $m_1 + m_2 = 0$, eller $m_1 = -m_2 = -m$. Er i dette Tilfælde $f(x)$ ikke givet, som foran anført, explicite, eller implicite ved sædvanlige Betingelsesligninger; men, er der i Stedet derfor givet $\left\{ \frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}} \right\} = \left\{ \frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}} \right\} = F(x)$, saa maa Bestemmelsen af $\phi_2(m_2, x) = \phi(m, x)$ i $f(x) = \left\{ \frac{d^m}{dx^m} \left\{ \frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}} \right\} \right\} = \frac{d^m F(x)}{dx^m} + \phi(m, x)$ i Reglen ske — som i § 3 anført — derved, at $f(x)$ for visse Værdier af x , eller, mere almindeligt, at $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$ for visse Værdier af m og x skal opfylde givne Betingelser (antage givne Værdier).

Naar saadanne Betingelser mangle, og $\phi(m, x)$ desuagtet kan bestemmes, saa er det fordi det i $\left\{ \frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}} \right\} = F(x)$ indgaaende bekjendte Complement $\phi_1(m_1, x) = \phi_1(-m, x)$ er saaledes beskaffet, at det kan være fremstaaet derved, at $\left\{ \frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}} \right\}$ er en Differentiation foretaget efter (6), eller (7), eftersom $m \geq 0$. Differentiation efter disse Formler kan nemlig medføre Led af Formen $\phi_1(-m, x)$, i hvilke Coefficienterne ere Funktioner af a , den lavere Grænse for Integralet i (6) og (7). Der foreligger da et $f(x)$ indeholdende bestemt Integral, som er $=$ en given Function, og man vil nu ved en nærmere Undersøgelse, som er foretagen i det følgende Hovedafsnits Art. 1 og 2, kunne slutte sig til, hvorledes $\phi_2 = \phi(m, x)$ i $f(x) = \frac{d^m F(x)}{dx^m} + \phi(m, x)$ maa være beskaffen, for at de bekjendte Led $\phi_1(-m, x)$ i $F(x)$ kunne være fremstaaede.

I Stedet for $\left\{ \frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}} \right\} = F(x)$ kunde der, naar $f(x)$ er det søgte Resultat, mere almindeligt være givet

$$F \left(\left\{ \frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}} \right\}, \left\{ \frac{d^{m_2} f(x)}{dx^{m_2}} \right\}, \dots, x \right) = 0$$

som er en Differentialligning af brudden, eller hvilken som helst Orden, der simplet skrives

$$F \left(\frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}}, \frac{d^{m_2} f(x)}{dx^{m_2}}, \dots, x \right) = 0.$$

Brudne Differentialligninger ville, naar de ere lineære, ofte kunne fuldstændigt integreres og kunne i denne Form let komme for i Anvendelserne. Naar et fuldstændigt Integral $f(x)$ er fundet, maae de arbitrære Constante deri kunne tænkes bestemte derved, at $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$ for visse Værdier af m og x skal opfylde visse Betingelser (have givne Værdier).

§ 10. Da (5) giver

$$\begin{aligned} \frac{d^m (x+a)^n}{dx^m} &= \frac{d^m}{dx^m} \left(x^n + \frac{n}{1} ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} + \dots \right) \\ &= \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n+1-m)} x^{n-m} + \frac{n\gamma(n)}{1 \cdot \gamma(n-m)} x^{n-1-m} a + \frac{n(n-1)\gamma(n-1)}{1 \cdot 2 \gamma(n-1-m)} x^{n-2-m} a^2 + \dots \\ &= \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n+1-m)} \left(x^{n-m} + \frac{n-m}{1} x^{n-m-1} a + \frac{(n-m)(n-m-1)}{1 \cdot 2} x^{n-m-2} a^2 + \dots \right) \\ &= \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n+1-m)} (x+a)^{n-m} = \frac{d^m (x+a)^n}{d(x+a)^m}, \end{aligned}$$

saa er i Almindelighed

$$\frac{d^m f(x+a)}{dx^m} = \frac{d^m f(x+a)}{d(x+a)^m} \quad (13)$$

som dog kun kan være nøiagtigt gjældende, naar Rækken for $f(x+a)$ efter Potenser af $(x+a)$ ikke indeholder positiv, eller negativ hele Potensexponenter ($n = \pm(1+n')$); thi, naar Potensexponenterne

i Rækken ere positiv, eller negativ hele, ville $\frac{d^m f(x+a)}{dx^m}$ og $\frac{d^m f(x+a)}{d(x+a)^m}$ differere ved Led af Formen $\phi(m, x) = x^{-m-1} \sum C_{r'} x^{-r'}$, eller af Formen $\phi_1(m, x+a) = (x+a)^{-m-1} \sum K_{r'} (x+a)^{-r'}$ med bestemte Coefficienter $C_{r'}$, eller $K_{r'}$. Det Samme gjælder med Hensyn til constante Led ($n=0$) i $f(x+a)$.

Dette ses for $n = n'$ let af den foranstaaende Udvikling, idet Rækken for $(x+a)^{n'}$ bliver endelig, medens $\frac{d^m (x+a)^{n'}}{d(x+a)^m} = \frac{\gamma(1+n')}{\gamma(1+n'-m)} (x+a)^{n'-m}$ kommer til at indeholde Led af Complementet $\phi(m, x)$, begyndende med

$$\frac{a^{1+n'}}{(1+n') \cdot \gamma(1+n'-m)} \frac{«-m+n'»}{«-m-1»} x^{-m-1}. \text{ De foranværende}$$

Led af Rækken for $\frac{d^m (x+a)^{n'}}{d(x+a)^m} = \frac{\gamma(1+n')}{\gamma(1+n'-m)} (x+a)^{n'-m}$ efter stigende Potenser af a ville netop være $= \frac{d^m (x+a)^{n'}}{dx^m}$, og disse Led, der ikke ere af Formen $\phi(m, x)$, ville derimod kunne bringes paa Formen $\phi_1(m, x+a)$. Naar $m = m'$, bortfalde Ledene af Complementet $\phi(m', x)$.

Naar $n = -(1+n')$, bevises Rigtigheden af de ved Formlen (13) gjorte Bemærkninger ved at udvikle $(x+a)^{-1-n'}$ i Række efter stigende Potenser af a og differentiere efter (5)'. Man finder da

$$\frac{d^m (x+a)^{-1-n'}}{dx^m} = \frac{d^m (x+a)^{-1-n'}}{d(x+a)^m} = \frac{(-1)^{n'+1}}{[n'] \cdot \gamma(-n'-m)} (x+a)^{-m-1-n'} \gamma \frac{x+a}{x}$$

som kan bringes saavel paa Formen $\phi(m, x)$ som paa Formen $\phi_1(m, x+a)$, idet den største Potensexponent til x , eller til $(x+a)$ bliver $\div m \div 1 \div (1+n')$.

§ 11. Der staaer endnu kun tilbage at paavise Muligheden af den fuldstændige Integration af de i Slutningen af § 9 omtalte lineære Differentialligninger af

hviikensomhelst (brudden) Orden. Som Exempel paa saadanne Ligninger skal her ikkun anføres

$$\frac{d^m y}{dx^m} + a x^n y = 0$$

Sættes

$$y = x^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} x^{i' p}$$

faaer man, ifølge (5), ved Indsættelse i den givne Differential-ligning,

$$\sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} \frac{\gamma(q + i' p + 1)}{\gamma(q + i' p + 1 - m)} x^{i' p - m} + a \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} x^{i' p + n} = 0$$

Er $n = -m$, maa p være $= 0$, saa at man, ved at sætte $A_0 + A_1 + A_2 + \dots = C$, faaer

$$y = C x^q, \text{ eller } y = \sum C_q x^q,$$

idet q maa bestemmes som Rod i Ligningen

$$\frac{\gamma(q + 1)}{\gamma(q + 1 - m)} + a = 0$$

der i Almindelighed maa løses ved Hjælp af Formlerne (3) og (4), eller (4)' i Forbindelse med Tabellerne over Γ Functionen; men, naar m er $= m'$, antager Ligningen Formen

$$\frac{\gamma(q + 1)}{\gamma(q + 1 - m')} = \frac{''q''}{''q - m''} = q(q-1)(q-2)\dots(q-m'+1) = -a$$

som giver m' Værdier for q , svarende til de m' particulære Integraller $y = C_q x^q$.

Ligeledes vil Ligningen til Bestemmelsen af q for $m = \div m'$ antage Formen

$$\frac{\gamma(q + 1)}{\gamma(q + 1 + m')} = \frac{''q''}{''q + m''} = \frac{1}{(q + m')(q + m' - 1)\dots(q + 2)(q + 1)} = -a$$

saa at f. Ex. Ligningen $\frac{d^{-2} y}{dx^{-2}} + a x^2 y = 0$ giver

$$y = C_1 x^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{a}}} + C_2 x^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{a}}}$$

Er $n \geq -m$, maa man sætte

$$A_0 \frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1-m)} = 0, \quad i'p - m = (i' - 1)p + n \text{ og}$$

$$A_{i'} \frac{\gamma(q+i'p+1)}{\gamma(q+i'p+1-m)} + a A_{i'-1} = 0,$$

hvilke 3 Betingelser give

$$q = m - 1 - r', \quad \text{idet } r' = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

$$p = m + n \text{ og}$$

$$A_{i'} = - \frac{\gamma(i'm + i'n - r')}{\gamma((i'+1)m + i'n - r')} a A_{i'-1}$$

hvorved alle Coefficienterne ere bestemte med Undtagelse af een, f. Ex. A_0 , som forbliver arbitrær ved enhver Værdi af r' og derfor kunde betegnes ved $C_{r'}$. Det fuldstændige Integral bliver da

$$y = x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{A_{i'}}{C_{r'}} x^{i'(m+n)}$$

eller

$$y = x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \left(1 - \frac{\gamma(m+n-r')}{\gamma(2m+n-r')} ax^{m+n} + \frac{\gamma(m+n-r') \gamma(2m+2n-r')}{\gamma(2m+n-r') \gamma(3m+2n-r')} (ax^{m+n})^2 + \dots \right)$$

Er $m = m'$, faaer r' ikkun Værdierne $0, 1, 2, \dots, (m' - 1)$, og, ifølge (3), bliver da

$$A_{i'} = - \frac{{}_a i' (m' + n) - 1 - r'}{{}_a i' (m' + n) - 1 - r' + m'} a A_{i'-1}$$

At r' , naar m er $= m'$, ikke kan faae Værdierne $m', m'+1, \dots, \infty$, følger af den første Betingelse, der bliver

$$A_0 \frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1-m')} = A_0 \frac{\gamma(m'-r')}{\gamma(-r')} = 0,$$

og som, ifølge (a), eller (12), kun kan være tilfredsstillet, naar

$$m' - r' > 0,$$

altsaa kun for $r' = 0, 1, 2, \dots, (m' - 1)$.

Naar m er $= -m'$, vil Betingelsen $A_0 \frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1+m')}$
 $= A_0 \frac{\gamma(-m'-r')}{\gamma(-r')}$ $= 0$ ikke kunne tilfredsstilles ved nogen
 endelig Værdi af r' , saa at Integralet i dette Tilfælde ikke kan
 have den antagne Form; men man vil da kunne sætte
 $\frac{d^{-m'}y}{dx^{-m'}} = z$ og $y = \frac{d^{m'}z}{dx^{m'}}$.

Rækken for y vil være convergent, eller divergent, eftersom

$$\lim_{i'} \frac{\gamma(i'(m+n) - r')}{\gamma(i'(m+n) - r' + m)} ax^{m+n} = R \leq 1,$$

som maa afgjøres efter de i Formlerne (3), (4), (4)', (11) og
 (12) indeholdte Egenskaber ved γ Functionen. Af disse følger,
 at ved endelige Værdier af x og r' vil

$m+n > 0$ og $m > 0$ give $R = 0$ og Rækken conv.

$m+n > 0$ og $m < 0$ give $R = \pm \infty$ og Rækken div.

Naar $(m+n)$ er < 0 , bliver Værdien af R i Almindelighed
 ubestemt; men man vil kunne forandre Fortegnet for
 m og $(m+n)$ ved at sætte $\frac{d^m y}{dx^m} = z$ og $y = \left\{ \frac{d^{-m} z}{dx^{-m}} \right\}$.

Forøvrigt vilde

$m+n < 0$, brudten, og $m = m'$ give $R = 0$ og Rækken conv. ($x \geq 0$),

$m+n = \div p'$ og $m \geq 0$, brudten, give $R = \pm \infty$ og Rækken div.

$m+n = \div p'$ og $m = m' \leq p' + r'$ give $R = 0$ og Rækken conv.

Foruden det allerede behandlede Tilfælde $n = -m$ kunde
 der endnu være særlig Anledning til at undersøge Tilfældene
 $n = -2m$ og $m+n = \pm p'$; men, da jeg i den hidtil givne
 Fremstilling af Grundtrækkene af min Methode for Differen-
 tiation med hvilket som helst Indices ikkun har villet antyde Me-
 thodens Anvendelser, ville de nævnte specielle Tilfælde, som kræ-
 vende vidtløftigere Undersøgelser, blive behandlede under den i det
 følgende Hovedafsnits Art. 5 givne almindelige Theori for Inte-
 grationen af lineære Differentialligninger af hvilkensomhelst Orden.

II. Anvendelser af Methoden.

Indledende Bemærkninger.

Hensigten med dette 2det Hovedafsnit er at stille de foran udviklede Grundsætninger for Differentiation med hvilkesomhelst Indices i et klarere Lys, navnlig igjennem en Række af Anvendelser, og at godtgjøre, at Methoden i alle Anvendelser vil kunne træde i Stedet for Liouilles Methode, samt at den er noget mere end en slet og ret mathematisk Curiositet, idet den formentligen vil kunne finde en vidtstrakt Anvendelse saavel i de forskjellige Grene af Mathematiken som i den mathematiske Physik.

I 1ste Hovedafsnit har jeg allerede anført adskillige saadanne Anvendelser, saasom Reductionen af visse lineære Differential ligninger af Ordenen m' til Ordenen $(m' - 1)$, Resultater udledede ved Sammenstillingen af forskjellige Udtryk for $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ osv. Jeg har ligeledes berørt, men ikke nærmere udviklet, at man, naar F er en bekjendt Function, vil kunne finde Functionen f af $\int_a^x (x - t)^{m'+\mu-1} f(t) dt = F(x)$. Det er blandt Andet dette Problem — saavel som andre dermed beslægtede, saasom Bestemmelsen af en Function ved Hjælp af Differential ligninger af brudten Orden osv. —, der her vil blive Gjenstand for en omhyggeligere Undersøgelse.

De Exempler, der i det Følgende ville forekomme, ere for største Delen tidligere behandlede (se Tidsskr. f. Mathematik 1868, Pag. 89—109) af Liouville ved hans Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices. Det vilde neppe have været vanskeligt at finde andre lignende Exempler; men jeg har netop fortrinsvis valgt hine, dels fordi de, med enkelte Tilfæelser og Udvidelser, ere tilstrækkelige til at belyse de nævnte

Anvendelser af min Methode, dels fordi det har været mig magtpaaliggende at godtgjøre, at denne, uagtet den hviler paa et fra Liouvilles ganske forskjelligt Grundlag, ikke destomindre er mere end tilstrækkelig til at løse alle de Problemer, der kunne løses ved Liouvilles. Iøvrigt har jeg fremstillet flere af disse Exempler under en almindeligere Form og søgt at behandle dem paa en saadan Maade, at det vigtigste Formaal for dette Hovedafsnit, nemlig at stille Anvendelsen af min Methode tydeligt frem og klare alle Tvivl, formentligen vil være fuldstændigt naaet. Overalt har jeg havt to Ting for Øie, som Liouville til dels har ignoreret, nemlig Betingelserne for Muligheden af en Løsning af Problemet og Bestemmelsen af Complementet.

Hvad specielt de Problemer angaaer, der kræve Bestemmelsen af f i $\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt = F(x)$, da fordrer deres Løsning efter Liouvilles Methode, at Problemet er af en saa speciel Natur, at a er uendelig, og at $f(x)$ kan udvikles efter Potenser af e^x med negative Exponenter ($f(\infty) = 0$), medens, som det senere vil blive vist, Problemet kan løses efter min Methode for en hvilken som helst Værdi af a . Derimod kan naturligvis ved dette Problem f ikke være en hvilken som helst Function, da det jo her fordres, at Integralet skal have den endelige Værdi $F(x)$.

Forinden jeg derfor kan gaae over til den egentlige Løsning af det sidstnævnte Problem, vil det være nødvendigt i et særskilt Afsnit (Art. 1) at underkaste Formlerne (6) og (7) en dyberegaaende Undersøgelse end den, som jeg maatte anse for tilstrækkelig i det foregaaende Hovedafsnit til en Fremstilling af Grundtrækkene af min Methode.

De følgende Afsnit ville derefter efter Haanden behandle:

Bestemmelsen af f , naar a i $\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt$ har en hvilken som helst endelig Værdi (eller 0);

Bestemmelsen af f , naar a er uendelig;

Bestemmelsen af Functioner, forekommende i Integraler, der kunne transformeres til $\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t) dt$;

Integration af og Anvendelser af Differentialligninger af hvilket som helst (brudten) Orden;

Integration af en lineær Differentialligning af 2den Orden ved Hjælp af hvilket som helst Differentiationsindices;

En almindelig Betragtning med Hensyn til Naturen af de Problemer, hvis Løsning kræver en Anvendelse af Differentiation med hvilket som helst Indices, samt slutteligen Bemærkninger angaaende Differentiation med Hensyn til flere Variable.

For at undgaae Forveksling med 1ste Hovedafsnits Formler, til hvilke der hyppigt vil blive henvist, ville Formlerne i det Følgende blive betegnede paa en anden Maade. — Naar det ikke udtrykkeligen bemærkes om en Størrelse m , at den er enten > 0 , eller < 0 , vil den — ligesom i 1ste Hovedafsnit — efter Omstændighederne blive betegnet ved $\pm (m' + \mu)$.

Art. 1. Almengyldigheden af Formlerne (6) og (7) samt Beskaffenheden af de Functioner f , der give en endelig Værdi for

$\int_a^x (x-t)^{m-1} f(t) dt$, $\frac{\partial}{\partial x} (m > 0)$, og omvendt.

Ved Formlen i § 5

$$\frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}} = \int f(x) dx^m = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1} f(t) dt \quad (6)$$

$(m > 0)$

er tilføjet den Bemærkning: «idet a er en vilkaarlig Constant, som i numerisk Henseende er $< x$. Kan x blive $= 0$, maa a være $= 0$.

Det i § 5 indeholdte Bevis for Almengyldigheden af (6) stiller nemlig kun den ene Fordring til a , at $(x - t)^{m-1}$ skal kunne udvikles efter Potenser af t med stigende Potensexponenter.

At denne Fordring er stillet følger deraf, at det er bemærket, at $\int_a^b (x - t)^{m-1} f(t) dt$, hvori b er en vilkaarlig Constant, indeholder Led af Complementet $\psi(-m, x) = x^{m-1} \sum C_r x^{-r}$, hvilken Bemærkning kun er rigtig under den Forudsætning, at $(x - t)^{m-1}$ udvikles med positive hele Potensexponenter for t og ikke for x . — Den eneste Betingelse for a er altsaa den, at $(x - t)^{m-1}$ skal kunne udvikles efter stigende Potenser af t . Under sin Variation mellem a og x maa derfor t bestandigt forblive numerisk $< x$, $\therefore a$ maa i numerisk Henseende være $< x$ og kan altsaa ikke være $= \pm \infty$. At a ikke kan være uendelig, vil ogsaa kunne ses af Anm. til § 5, som viser, at venstre Side af (6) for den specielle Værdi $a = \infty$ og for de specielle Functionsformer $f(x)$, der tillade en Rækkeudvikling efter Potenser af e^x med negative Exponenter ($f(\infty) = 0$), bliver = Liouvilles Integral med Index m , taget med Hensyn til x af $f(x)$.

Almengyldigheden af Formlen (6) blev i § 5 først directe bevist for saadanne Functioner $f(x)$, hvis Rækkeudvikling efter Potenser af x alene indeholdt Potensexponenter, der vare $> \div 1$, saa at altsaa $\lim \epsilon f(\epsilon) = 0$, og Beviset blev dernæst udstrakt til alle Functioner, altsaa ogsaa til saadanne, hvis Rækkeudvikling efter Potenser af x kunde indeholde Exponenter, der vare $< \div 1$. Den sidste Del af Beviset kunde paa det daværende Stadium af Fremstillingen ikkun føres paa indirecte Måde. Ved Hjælp af den senere erholdte Formel (p) i § 7, der er gjældende for hvilket som helst positive, eller negative Værdier af m , kan nu ogsaa dette Bevis let føres directe. Det vil i dette Øiemed være tilstrækkeligt i (6) at sætte $f(t) = Ct^n$, idet n er et hvilket som helst Tal. Ved Rækkeudvikling af $(x - t)^{m-1}$ efter stigende Potenser af t faaes da

$$\int_a^{(m)} Cx^n dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1} C t^n dt =$$

$$C \frac{x^{n+m}}{\gamma(m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{(r'+n+1) \cdot [r']} \frac{{}_m m-1}{m-1-r'}$$

$$- C \frac{a^{n+1} x^{m-1}}{\gamma(m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{[r']} \frac{{}_m m-1}{m-1-r'} \frac{a^{r'} x^{-r'}}{n+1+r'}$$

men, ombyttes nu i Formlen (p) i § 7 m med $-(n+1)$ og $(a'+a)$ med m, faaes

$$\int_a^{(m)} Cx^n dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1} C t^n dt =$$

$$C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)} x^{n+m} - C \frac{a^{n+1} x^{m-1}}{\gamma(m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{[r']} \frac{{}_m m-1}{m-1-r'} \frac{a^{r'} x^{-r'}}{n+1+r'}$$

som viser, at det ved (6) erholdte Resultat ikkun kan differere fra det Resultat, som Grundformlen (5) giver, ved Led af Complementet $\psi(-m, x)$, samt at disse Led ville forsvinde, naar $a = 0$ og $n > -1$.

Af ovenstaaende Formel erholdes let

$$\int_a^{(m)} C(x-a)^n dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1} \cdot C(t-a)^n dt =$$

$$C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)} (x-a)^{n+m} -$$

$$C \lim_{\varepsilon} (x-a)^{m-1} \frac{\varepsilon^{n+1}}{\gamma(m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{[r']} \frac{{}_m m-1}{m-1-r'} \frac{\varepsilon^{r'} (x-a)^{-r'}}{n+1+r'} \Big|_{(m>0)} \quad (a)$$

som for $m > 0$ giver et nyt Bevis for Sætningen $\frac{d^{-m} f(x+a)}{dx^{-m}}$
 $= \frac{d^{-m} f(x+a)}{d(x+a)^{-m}}$, der, med de til Formlen (13) i § 10 knyttede Bemærkninger, er bevist at gjælde for hvilkesomhelst positive og negative Værdier af m.

I Formlen (a) har jeg i Stedet for $\int_a^{(m)} C(x-a)^n dx^m$ skrevet $\int_a^{(m)} C(x-a)^n dx^m$, idet jeg i det Følgende stedse vil

bruge Betegnelsen $\int_a^{(m)} f(x) dx^m$ i Stedet for $\int_a^{(m)} f(x) dx^m = \frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}}$ overalt, hvor Differentiationen med Index $-m$ er udført (med a som Grænse i Integralet) efter Formlen (6), som — i Modsætning til Formlerne (5), (5)', (9) og (10) — kan give Led af Complementet $\psi(-m, x-a) = (x-a)^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} K_{r'} (x-a)^{-r'}$.

Formlen (6) maa da med den nye Betegnelse skrives

$$\int_a^{(m)} f(x) dx^m = \frac{1}{\gamma^{(m)}} \int_a^x (x-t)^{m-1} f(t) dt; \quad (m > 0) \quad ((6))$$

som indeholder Definitionen paa den særegne Differentiation med Index $-m$, der betegnes ved

$$\int_a^{(m)} f(x) dx^m$$

Forestiller man sig nu $f(x) = f(a + \varepsilon)$ udviklet i Række efter Potenser af $\varepsilon = x - a$, saa vil Formlen (6) give et af Ledene i

$$\int_a^{(m)} f(x) dx^m = \frac{1}{\gamma^{(m)}} \int_a^x (x-t)^{m-1} f(t) dt = \frac{1}{\gamma^{(m)}} F(x); \quad (m > 0),$$

og man vil derfor af (6) kunne, med Hensyn til Beskaffenheden af Functionerne f og F , udlede forskellige Slutninger, som det vil være nødvendigt at have gjort, forinden man af F som given vil kunne bestemme f . Der vil ved denne Undersøgelse blive skjælnet mellem 2 Hovedtilfælde, nemlig $n > -1$ og $n < -1$, og af det sidste vil atter $n = -m - 1 - r'$ være et specielt Tilfælde.

Det ses da for det Første af (6), at $\int_a^x (x-t)^{m-1} f(t) dt = F(x)$

i Almindelighed vil kunne indeholde Led af Complementet $\psi(-m, x-a) = (x-a)^{m-1} \sum K_{r'} (x-a)^{-r'}$; men, naar Potensexponenterne n i Rækken for $f(x) = f(a + \varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ ere > -1 , og altsaa $\lim \varepsilon f(a + \varepsilon)$

$= 0$, ville Ledene af Complementet forsvinde, og Potensexponenterne i Rækken for $F(x) = F(a + \varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ ville da være $> m - 1$, og følgelig $\lim \frac{F(a + \varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0$.

Er altsaa $m > 1$, vil man faae $\lim F(a + \varepsilon) = F(a) = 0$. Ligeledes faaes $F(a) = 0$, naar $m = \mu < 1$, og Potensexponenterne n ere $> -\mu$. Naar derimod $m = \mu$ og $-1 < n \leq -\mu$, vil Værdien $F(x)$ af Integralet ikke forsvinde, naar Grændserne blive ligestore, d. naar $\lim (x - a) = \lim \varepsilon = 0$; men $F(a)$ vil blive uendelig, eller constant og $\neq F(x)$, eftersom $n \leq -\mu$. I alle Tilfælde bliver dog, naar Potensexponenterne n i $f(x)$ ere > -1 , $\lim \frac{F(a + \varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0$.

Naar enten alle, eller nogle af Potensexponenterne n i Rækken for $f(x)$ ere < -1 , vil (a) for ethvert saadant af Ledene $C(x - a)^n$ give et for endelige Værdier af n endeligt Antal Led af Complementet $\phi(-m, x - a)$ med uendelige Coefficienter. Er $n = -m - 1 - r'$, vil der til et saadant Led af $f(x)$ ikkun svare Led i $F(x)$ af Formen $\phi(-m, x - a)$, idet da $C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)} (x - a)^{n+m}$ bliver $= 0$. Det vil endvidere ses af (a), at, naar der i Rækken for $f(x)$ findes Led med Potensexponenter n , der ere < -1 , maae de **tilsvarende** Led af $F(x)$ forsvinde for $x = a$; thi Ledene i (a) af Formen $\phi(-m, x - a)$ ville da ved Formlen (p) i § 7 reduceres til $\frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)} \varepsilon^{n+m}$, saa at (a) for $n < -1$ og $x - a = \lim \varepsilon = 0$ giver 0 til Resultat. Naar omvendt $F(x)$ indeholder Led af Complementet $\phi(-m, x - a)$, saa maa der i Rækken for $f(x)$ findes Potensexponenter, der ere ≤ -1 . Men, naar $F(x)$ skal være endelig — og fra denne Forudsætning ville vi gaae ud — saa maae, idet ethvert enkelt Led af $f(x)$, for hvilket n er < -1 , giver et uendeligt Resultat i $F(x)$, saadanne Led af $f(x)$ være til Stede i uendeligt Antal og være Rækkeudviklingen

for en Function, der, som f. Ex. $C(x-a)^n e^{-\frac{p^2}{x-a}}$, forsvinder for $x = a$. Den hertil svarende Del af $F(x)$ maa, som ovenfor bemærket, ligeledes forsvinde for $x = a$; men, tænkes den udviklet efter Potenser af $(x-a)$ og sondret i 2 Grupper, den ene ikke indeholdende Led af Formen $\psi(-m, x-a)$, den anden indeholdende Led af denne Form, vil enhver af disse Grupper for sig blive uendelig for $x = a$. Kun naar den første af disse Grupper er $= 0$, \therefore ikke eksisterer, altsaa naar $f(x)$ indeholder en Function, der, som f. Ex. $C(x-a)^{-m-1} e^{-\frac{p^2}{x-a}}$, er af Formen $\psi(m, x-a) = (x-a)^{-m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} k_{r'} (x-a)^{-r'}$ og forsvinder for $x = a$, vil der, ifølge (a), hertil i $F(x)$ ikkun svare Led af Formen $\psi(-m, x-a)$, som maae forsvinde for $x = a$ og altsaa f. Ex. muligvis kunde være af Formen $K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p^2}{x-a}}$.

Omvendt, naar $F(x)$ indeholder Led af Formen $\psi(-m, x-a)$, der, som f. Ex. $K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p^2}{x-a}}$, **for**svinde for $x = a$, saa er dette et Tegn paa, at der til dem svarer Led i $f(x)$, som ere af Formen $\psi(m, x-a)$, og som ligeledes maae forsvinde for $x = a$, saa at de f. Ex. kunde være af Formen $k(x-a)^{-m-1} e^{-\frac{p^2}{x-a}}$. Findes der derimod ikke i $F(x)$ Led af Formen $\psi(-m, x-a)$, **der** forsvinde for $x = a$, saa indeholder $f(x)$ ingen Led af Formen $\psi(m, x-a)$, saa at $\frac{1}{\gamma(m)} \frac{d^m F(x)}{dx^m}$, beregnet efter (5), eller en anden af de Formler, der ikke kunne medføre Led af Complementet $\psi(m, x-a)$, maa indeholde alle Ledene af $f(x)$ og være nøiagtigt $= f(x)$.

Vi have eksempelvis anført, at der til Led af $F(x)$ af Formen $K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$, ($p > 0$), kunde svare Led af $f(x)$ af Formen $k(x-a)^{-m-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$. Dette finder i Virkeligheden Sted. Sættes nemlig $\frac{p}{t-a} = \frac{p}{x-a} + y$, faaes, idet y maa være > 0 ,

$$\int_a^x (x-t)^{m-1} \cdot k(t-a)^{-m-1} e^{-\frac{p}{t-a}} dt =$$

$$\frac{k}{p^m} (x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}} \int_0^\infty y^{m-1} e^{-y} dy =$$

$$\gamma(m) \frac{k}{p^m} (x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$$

Forandrer man heri $\gamma(m) \frac{k}{p^m}$ til K , faaer man, ifølge ((6)), Formlen

$$\int_a^{(m)} p^m K (x-a)^{-m-1} e^{-\frac{p}{x-a}} dx^m = K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}} \quad (\beta)$$

$(p > 0)$

Ved den samme Substitution finder man den tilsyneladende mere almindelige, men desuagtet mindre anvendelige Formel

$$\int_a^{(m)} C(x-a)^{-m-1-r'} e^{-\frac{p}{x-a}} dx^m =$$

$$\frac{C}{p^m} (x-a)^{m-1-r'} e^{-\frac{p}{x-a}} \sum_{i'=0}^{i'=r'} \frac{{}^m m-1+i' \cdot {}^m m-1 \cdot {}^m r'-i' \cdot (x-a)^{i'}}{[i'] \cdot p^{i'}} \dots (\beta)'$$

$(p > 0)$

Sætter man $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, idet $F_1(x)$ er fremstaaet af alle de Led af Rækken for $f(x) = f(a + \varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$, hvis Potensexponenter ere > -1 , og $F_2(x)$ fremstaaet af alle de Led i $f(x)$, hvis Potensexponenter ere < -1 , saa have vi fundet, at man maa have $\lim_{\varepsilon^{m-1}} \frac{F_1(a + \varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0$ og $\lim F_2(a + \varepsilon) = F_2(a) = 0$; men den sidste Betingelse kan — idet den er fremstaaet derved, at de Led af (a), der ere af Formen $\psi(-m, x - a)$, ophæve for $x = a$ de Led af (a), der ikke ere af denne Form — aabenbart forandres til $\lim_{\varepsilon^p} \frac{F_2(a + \varepsilon)}{\varepsilon^p} = 0$, idet p er et hvilket som helst Tal. — Betingelsen

$$\lim_{\varepsilon} \frac{F(a + \varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0 \quad (\gamma)$$

maa derfor i alle Tilfælde være opfyldt.

Naar Rækkeudviklingen for $f(x) = f(a + \varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ indeholder negative hele Potensexponenter, eller naar

Rækken for $f(a + \varepsilon)$ indeholder Led af Formen $C(x - a)^n \cdot l(x - a)$, er (a) ikke gjældende for saadanne Led; men man vil let — paa lignende Maade som de for disse Tilfælde gjældende Formler (5)' og (10) ere udledede — kunne finde en til (a) svarende Formel, der ligesom denne vil lede til de ovenfor fundne Resultater.

Hvad der er bemærket om Formlen (6), kan let overføres paa Formlen

$$\begin{aligned} \frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} &= \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} \cdot \int_a^x (x-t)^{-\mu} f(t) dt \\ &= \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} \cdot \int_a^{(1-\mu)} f(x) dx^{1-\mu} \end{aligned} \quad ((7))$$

som er gjældende for enhver Værdi af a , der i numerisk Henseende er $< x$.

I Modsætning til Grundformlen (5), Formlerne (5)' og (10), (9) og betingelsesvis (8) vil ((7)) i Almindelighed give Led af Complementet $\phi(m, x - a) = (x - a)^{-m-1} \Sigma K_r (x - a)^{-r}$; men, naar $\lim \varepsilon f(a + \varepsilon) = 0$ derved, at Potensexponenterne i Rækken for $f(x) = f(a + \varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ ere > -1 , vil ((7)) ikke indeholde Led af Complementet $\phi(m, x - a)$ og altsaa give samme Resultat som de andre Formler.

Naar $f(x)$ er af Formen $\phi(-m, x - a) = (x - a)^{m-1} \Sigma K_r (x - a)^{-r}$, vil ((7)) alene give Led af Complementet $\phi(m, x - m)$; thi $\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}$ vil da, beregnet efter Grundformlen (5), være $= 0$. Naar i dette Tilfælde $\lim f(a + \varepsilon) = 0$, vil ((7)) kunne give et endeligt Resultat af Formen $\phi(m, x - a)$; men en til (5) svarende Formel vil dog kun kunne fremstilles, naar $m' = 0$, idet man da faaar

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d^\mu \cdot K(x-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}}}{dx^\mu} = \\
 & \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d}{dx} \cdot \int_a^x (x-t)^{-\mu} \cdot K(t-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{t-a}} dt \\
 & = \frac{d}{dx} \cdot \int_a^{a(1-\mu)} K(x-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}} dx^{1-\mu} \\
 & = p^\mu K \cdot (x-a)^{-\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}}
 \end{aligned} \right\} \quad (\delta) \quad (p > 0)$$

Dette Resultat erhoides ved først at sætte $\frac{x-t}{t-a} = y$, dernæst udføre Differentiationen med Hensyn til x og endeligen sætte $\frac{p}{x-a} y = z$.

Naar man sætter $\int_a^x (x-t)^{-\mu} f(t) dt = \int_0^{x-a} t^{-\mu} f(x-t) dt$, vil det let ses, at Formlen ((7)) kan skrives

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} &= \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d^{m'-p'}}{dx^{m'-p'}} \cdot \int_a^x (x-t)^{-\mu} f^{(p'+1)}(t) dt \\
 &= \frac{d^{m'-p'}}{dx^{m'-p'}} \int_a^{a(1-\mu)} f^{(p'+1)}(x) dx^{1-\mu} \quad ((7))''
 \end{aligned}$$

forudsat at $f^{(p')}(a) = 0$. — Iøvrigt vil vistnok denne Formel som oftest i Praxis vise sig mindre hensigtsmæssig end ((7)). Et Exempel herpaa er $m' = 0$ og $f(x) = (x-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$; vilde man her anvende ((7))'' og sætte $p' = m' = 0$, saa vilde det i (δ), ved Advendelsen af ((7)), fremkomne Resultat vanskeligt kunne findes. En Værdi af p' , som vilde kunne give $f^{(p'+1)}(t) = 0$, kan selvfølgelig ikke anvendes i ((7))''.

Anm. De for Anvendelserne vigtigste Resultater af Undersøgelserne i denne Art. ere kort gjengivne i det franske Résumé, som overhovedet formenes at ville lette Oversigten over Methodene i sin Helhed.

Art. 2. Bestemmelse af Functionen f i Ligningen

$$\int_a^{\xi} (\xi - x)^{m-1} f(x) dx = F(\xi)$$

hvor $m > 0$, a ikke uendelig og F en bekendt Function.

Dette Problem er i Grunden fuldstændigt løst ved den i Art. 1 foretagne Undersøgelse. Vi kunne derfor her indskrænke os til at give en kortfattet Fremstilling af Løsningen.

Hvis $F(\xi)$ indeholder Led af Formen $\phi(-m, \xi - a) = (\xi - a)^{m-1} \Sigma K_r (\xi - a)^{-r}$, som forsvinde for $\xi = a$, saa maa man begynde med at udsondre dem af $F(\xi)$. **Betegnes disse Led af $F(\xi)$ ved $\Psi(\xi - a)$** , saa bliver ifølge ((6)), Ligningen til Bestemmelsen af f

$$\int_a^{\xi} (\xi - x)^{m-1} f(x) dx = \gamma(m) \int_a^{(m)} f(\xi) d\xi^m = F(\xi) = G(\xi) + \Psi(\xi - a) \quad \text{I}$$

I denne Ligning kan altsaa $G(\xi)$ muligvis ogsaa, ligesom Ψ , indeholde Led af Formen $\phi(-m, \xi - a)$; men disse Led ville ikke, saaledes som Ψ , forsvinde for $\xi = a$, men tværtimod derved blive uendelige.

Naar man differentierer I med Index m med Hensyn til ξ ved een, eller flere af de Formler, der, som f. Ex. (5), ikke kunne indføre Led af Complementet $\phi(m, \xi - a)$, vil Ψ forsvinde og ligeledes de Led, der maatte findes i $G(\xi)$ af Formen $\phi(-m, \xi - a)$. Man faaer da, ved at forandre ξ til x og efter de nævnte Formler foretage en «fuldstændig» Differentiation

$$f(x) = \frac{1}{\gamma(m)} \left\{ \frac{d^m F(x)}{dx^m} \right\} = \frac{1}{\gamma(m)} \left(\frac{d^m F(x)}{dx^m} + \phi(m, x - a) \right), \quad \text{II}$$

idet
$$\int_a^{(m)} \phi(m, x - a) dx^m = \Psi(x - a)$$

som, ifølge det i Art. 1 Udviklede, nødvendigvis maa indeholde alle Led af $f(x)$; thi vel kan der i $\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m G(x)}{dx^m}$ være forsvundet Led af Formen $\psi(-m, x-a)$; men disse høre, ifølge (a), sammen med andre Led, $C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)} x^{n+m}$, som ved Differentiationen med Index m give de Led, Cx^n , af $f(x)$, som have frembragt alle hine Led i $G(x)$. Derimod ville de Led af $f(x)$, der have frembragt Ψ , ikke kunne findes i $\frac{1}{\gamma(m)} \frac{d^m F(x)}{dx^m}$, men maae bestemmes ved den anden Ligning II. Disse Led af $f(x)$, multiplicerede med $\gamma(m)$, eller **Complementet** $\psi(m, x-a)$ til $\frac{d^m F(x)}{dx^m}$ vil altsaa blive $= 0$, naar $\Psi = 0$, og dette vil som oftest være Tilfældet, da Ψ jo er en Function af en ganske speciel Form.

Naar Functionen $\Psi(x-a)$ ikke er $= 0$, vil den i Reglen bestaae af, eller kunne bringes til at bestaae af Led af Formen $K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$, $p > 0$, og $\psi(m, x-a)$ kan da bestemmes ved Formlen (β) i Art. 1.

Af saadanne Former for $\Psi(x-a)$ kan, foruden

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x-a) &= (x-a)^{m-1} \sum K_{r'} e^{-\frac{p_{r'}}{x-a}}, \quad (p_{r'} > 0), \\ \phi(m, x-a) &= (x-a)^{-m-1} \sum p_{r'}^m K_{r'} e^{-\frac{p_{r'}}{x-a}} \end{aligned} \right\} \text{II. a}$$

mærkes

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x-a) &= (x-a)^{m-1} \int_c^b \varphi(a) e^{-\frac{a^2}{x-a}} da, \\ \phi(m, x-a) &= (x-a)^{-m-1} \int_c^b (a^2)^m \varphi(a) e^{-\frac{a^2}{x-a}} da \end{aligned} \right\} \text{II. b}$$

Denne Bestemmelsesmaade for $\psi(m, x-a)$ ved Hjælp af Formlen (β) vil, naar $m = \mu < 1$, ifølge (δ), være ensbetydende med en Differentiation med Index

μ med Hensyn til x af den anden Ligning II, foretaget efter Formlen ((7)) med a som lavere Grændse.

Formlen $(\beta)'$ vilde kunne komme til Anvendelse ved Bestemmelsen af $\psi(m, x-a)$, hvis $\Psi(x-a)$ havde samme Form som høire Side af $(\beta)'$; men denne Form er meget speciel og falder ind under II. a.

Naar Functionen $G(\xi)$ i I ikke indeholder Led af Formen $\psi(-m, \xi-a)$, ville, ifølge Art. 1, Potensexponenterne i dens Rækkeudvikling efter Potenser af $(\xi-a)$ alle være $> m-1$, altsaa i hvert Fald > -1 , saa at $\frac{d^{m+\mu} G(x)}{dx^{m'+\mu}} =$

$\frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} \cdot \int_a^{x^{1-\mu}} G(x) dx^{1-\mu}$, ifølge de ved Formlen ((7)) gjorte Bemærkninger, ikke vil kunne indeholde Led af Complementet $\psi(m, x-a)$. Man vilde derfor i dette Tilfælde kunne anvende Formlen ((7)) ved Udførelsen af Differentiationen i II, naar man i Stedet for $F(x)$ satte $G(x)$ og saaledes kun differentierede de Led af $F(x)$, der ikke indeholde $\Psi(x-a)$. — I alle andre Tilfælde maa og i alle Tilfælde kan Differentiationen $\frac{d^m F(x)}{dx^m}$ i II udføres ved Hjælp af Formlerne (5), (9), eller (10), eller ved (8), naar i denne Formel ikkun (5), (9), eller (10) blive anvendte, idet der ved Anvendelsen af disse Formler aldrig kan indføres Led af Complementet $\psi(m, x-a)$. Det Samme gjælder om (5)'; men der vil ikke her kunne blive Brug for denne Formel. Er $F(x)$ umiddelbart givet som en Function af $(x-a)$, saa foretages Differentiationen med Hensyn til $(x-a)$, idet $\frac{d^m F(x)}{dx^m} =$

$$\frac{d^m F(x)}{d(x-a)^m}.$$

Det bør dog bemærkes, at, naar det ovenfor er sagt, at $\frac{d^m F(x)}{dx^m}$ i II ikkun bør beregnes paa den angivne Maade, saa er dette sket af Hensyn til en praktisk simpel Bestemmelses-

maade for $\phi(m, x - a)$. Theoretisk er der Intet til Hinder for, at $\frac{d^m F(x)}{dx^m}$ beregnes efter en hvilken som helst af de for denne Regningsart givne Formler, f. Ex. efter (7) med en hvilken som helst vilkaarlig valgt lavere Grændse c i Stedet for a ; men Complementet i II bliver da $\phi_1(m, x)$, hvis Bestemmelse kan blive vanskelig, for ikke at sige umulig, naar der til Bestemmelsen af $f(x)$ ved I ikke er føiet særlige Betingelser, som kunne tjene til Complementets Bestemmelse.

Naar en Løsning af I skal være mulig, maa Betingelsen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(a + \varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0 \tag{7}$$

være opfyldt.

En meget almindelig Form for I er

$$\gamma(m) \int_a^{(m)} f(\xi) d\xi^m =$$

$$\Sigma A_{r'} (\xi - a)^{n_{r'}} + l (\xi - a) \Sigma B_{r'} (\xi - a)^{q_{r'}} + (\xi - a)^{m-1} \Sigma K_{r'} e^{-\frac{p_{r'}}{\xi - a}} \tag{I'}$$

hvor i man, naar en Løsning skal være mulig, maa have $n_{r'} > m - 1$, $q_{r'} > m - 1$ og $p_{r'} > 0$. Naar denne Betingelse er opfyldt, faaes ved Anvendelse af Formlerne (5), 10 og II a

$$\left. \begin{aligned} \gamma(m) f(x) = & \Sigma A_{r'} \frac{\gamma(1 + n_{r'})}{\gamma(1 + n_{r'} - m)} (x - a)^{n_{r'} - m} \\ & + \Sigma B_{r'} \frac{\gamma(1 + q_{r'})}{\gamma(1 + q_{r'} - m)} (x - a)^{q_{r'} - m} \left(l(x - a) + \frac{\gamma'(1 + q_{r'})}{\gamma(1 + q_{r'})} - \frac{\gamma'(1 + q_{r'} - m)}{\gamma(1 + q_{r'} - m)} \right) \\ & + (x - a)^{m-1} \Sigma p_{r'}^m K_{r'} e^{-\frac{p_{r'}}{x - a}} \end{aligned} \right\} \tag{II'}$$

Jeg har i I' fremstillet $F(\xi)$ som givet umiddelbart som en Function af $(-a)$. Dette er naturligvis ikke nødvendigt, ligesom det i Praxis heller ikke i Almindelighed vil være nødvendigt, at man udvikler $F(\xi)$ efter Potenser af $(\xi - a)$. En saadan Rækkeudvikling er hidtil kun tænkt udført for at lette Fremstillingen og Forstaaelsen. Hvis den havde været nødvendig for

Udførelsen, vilde jeg have valgt Betegnelserne $F(\xi - a)$ og $f(x - a)$ i Stedet for $F(\xi)$ og $f(x)$. Hvis saaledes $F(\xi)$ i I' havde været givet under en anden Form, idet man f. Ex. i Stedet for de 2 første Summer havde havt $\sum C_r \xi^{n_r} + l \xi \sum D_r \xi^{n_r}$, vilde man, efterat have forvissat sig om, at Betingelsen (γ) var tilfredsstillet, have differentieret I' med Index m med Hensyn til ξ i Stedet for med Hensyn til $(\xi - a)$, hvorved man ifølge, § 10, vilde have faaet ganske det samme Resultat. Dog maae — ifølge Bemærkningen i § 10 til Sætningen $\frac{d^m f(x+a)}{dx^m} = \frac{d^m f(x+a)}{d(x+a)^m}$ — de Led af $F(\xi)$, hvis Potensexponenter ere positiv hele, eller 0, enten være eller bringes til at være Potenser af $(\xi - a)$ og ved Differentiationen med Index m efter (5), (9), eller (10) differentieres med Hensyn til $(\xi - a)$, da ellers ϕ i II ikke vil kunne bestemmes som foran anført. Ligeledes maa, naar Complementet ϕ i II skal kunne bestemmes paa den anførte Maade, den Del af $F(\xi)$, som er bleven betegnet ved $\Psi(\xi - a)$, søges bragt paa en af de foran anførte Former.

Ex. 1. Betragtes $y = (\xi - x)^{m-1} f(x)$ som Ligningen for en Curve med de retvinklede Coordinater x og y , saa udtrykker I, at $f(x)$ skal bestemmes saaledes, at Arealet, som begrænses af Curven, x Axen og Ordinaterne til $x = a$ og $x = \xi$, skal være = den bekjendte Function $F(\xi)$, eller at $\int_a^\xi y dx$ skal være = $F(\xi)$. Naar en Løsning skal være mulig, maa $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(a + \varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}}$ være = 0, saa at man f. Ex., naar $p > 0$, kunde have

$$F(\xi) = A(\xi - a)^{p+m-1}, \text{ som giver}$$

$$y = \frac{A}{\gamma(m)} \frac{\gamma(m+p)}{\gamma(p)} (\xi - x)^{m-1} (x - a)^{p-1}$$

Skal altsaa Curvens Ligning have Formen $y = (\xi - x)^{\frac{1}{2}} f(x)$, og Arealet $F(\xi)$ være = $A(\xi - a)^2$, saa bliver, idet $m = \frac{3}{2} = p$, og $\gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

$$y = \frac{A}{\gamma(\frac{3}{2})} \frac{\gamma(\frac{3}{2})}{\gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{(\xi - x)(x - a)} = \frac{8}{\pi} A \sqrt{(\xi - x)(x - a)}$$

som er Ligningen for en Ellipse, hvis ene Axe falder i x Axen, og hvis Halvaxer ere $\alpha = \frac{1}{2}(\xi - a)$ og $\beta = \frac{4}{\pi} A(\xi - a)$. Indføres disse i Udtrykket for Arealet, faaes

$$F(\xi) = A(\xi - a)^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot \alpha \beta$$

Var A givet $= \frac{\pi}{8}$, vilde man faae en Cirkel.

Ex. 2. Man søger en Curve ($y = f(x)$), som opfylder følgende Betingelse:

Naar man betragter Fodpunktet ($x = \xi$, $y = 0$) af Ordinaten $f(\xi)$ som Toppunktet af en Parabel, hvis Ligning i Coordinaterne x og y' , er $y' = \sqrt{2\xi(\xi - x)}$, og som altsaa har sin Axe sammenfaldende med x Axen og sin Parameter $= 2\xi$, og man derefter konstruerer en tredie Curve (Coordinater x og y''), hvori enhver Ordinat y'' opfylder Betingelsen

$$y'' = y \cdot y' = f(x) \cdot \sqrt{2\xi(\xi - x)},$$

saa skal Arealet, $\int_0^{\xi} y'' dx$, som indeslutes af denne tredie Curve og Coordinataxerne, for enhver Værdi ξ af x være $= H(\xi)$, idet H er en bekjendt Function.

Man skal altsaa have

$$\int_0^{\xi} f(x) \cdot \sqrt{2\xi(\xi - x)} dx = H(\xi), \text{ eller}$$

$$\int_0^{\xi} (\xi - x)^{\frac{3}{2}-1} f(x) dx = \gamma(\frac{3}{2}) \int_0^{\xi} f(\xi) d\xi^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{H(\xi)}{\sqrt{\xi}},$$

som ved Differentiation med index $\frac{3}{2}$ giver

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{d^{\frac{3}{2}}}{dx^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \right\}$$

idet Complementet $\psi(\frac{3}{2}, x)$ bestemmes efter de foran anførte Regler (II, II a, II b, II'). Naar en Løsning skal være mulig, maa man, ifølge (γ), have $\lim \frac{H(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}} - 1} = \lim \frac{H(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$, saa at man f. Ex., naar $p > 0$, kunde have $H(\xi) = A\xi^{1+p}$, som giver $\frac{H(x)}{\sqrt{x}} = Ax^{p+\frac{1}{2}}$ og $y = f(x) = A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + p)}{\Gamma(p)} x^{p-1}$.

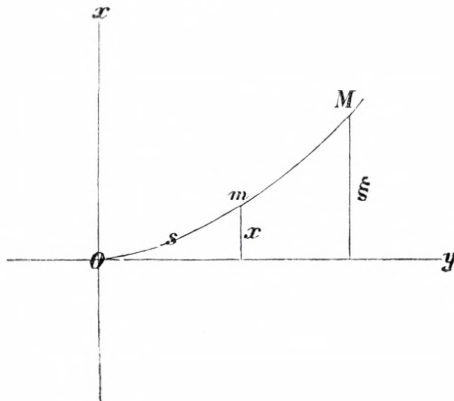
Skal $H(\xi)$ være = det Halve af Kvadratet construeret paa ξ , bliver altsaa, idet $A = \frac{1}{2}$ og $p = 1$, Ligningen for den søgte Curve

$$y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} \sqrt{2}$$

saa at Curven er en ret Linie parallel med x Axen. Havde man i Stedet for Betingelsen $y'' = y \cdot y'$ havt $y'' = y \cdot (y')^{2(m-1)}$, vilde m være traadt i Stedet for Index $\frac{3}{2}$.

Ex. 3. Fig. 1. At bestemme en Curve OM saaledes, at Tiden, som et materielt Punct, paavirket af Tyngden, behøver

Fig. 1.



for at bevæge sig fra M til O , bliver en given Function $H(\xi)$ af den lodrette Høide ξ af M over Horizontalplanet gennem O .

I den lodrette Plan OM tages en vandret Linie gennem O til y Axe. Et vilkaarligt Punct m paa Curven OM har Ordinaten x og Bue $Om = s$. Tyngdeaccelerationen g virker efter den negative Retning af x Axen, saa at ds har modsat Tegn af dt . Ligningen for Bevægelsen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(\xi - x)$$

giver da Tiden for Faldet fra M til O

$$t = H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\xi} (\xi - x)^{-\frac{1}{2}} \frac{ds}{dx} dx$$

Betegnes altsaa den ubekjendte Function $\frac{ds}{dx}$ ved $f(x)$, faaes

$$\int_0^{\xi} (\xi - x)^{\frac{1}{2}-1} f(x) dx = \gamma \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\xi} f(\xi) d\xi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2g} H(\xi)$$

som, ved Differentiation med Index $\frac{1}{2}$, giver

$$\frac{ds}{dx} = f(x) = \frac{1}{\gamma \left(\frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{d^{\frac{1}{2}} \sqrt{2g} H(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} \right\} = \sqrt{2g} \left\{ \frac{d^{\frac{1}{2}} H(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

Naar $f(x)$ skal kunne bestemmes herved, maa man, ifølge (γ), have $\lim_{\varepsilon^{\frac{1}{2} \rightarrow 1}} \frac{H(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} H(\varepsilon) = 0$; men denne Betingelse er ikke her tilstrækkelig, thi, da $f(x)$ skal være $= \frac{ds}{dx}$, maa den fundne Værdi af x være numerisk ≥ 1 . Naar denne Betingelse er opfyldt, er Curven fuldstændigt bestemt ved

$$s = \int_0^x f(x) dx \quad \text{og} \quad y = \int_0^x \sqrt{(f(x))^2 - 1} dx$$

$t = H(\xi) = \frac{e^{-\frac{1}{\xi}}}{\sqrt{\xi}}$ tilfredsstiller Betingelsen (γ) og giver, ifølge II', eller, ifølge (δ),

$f(x) = \pm \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x\sqrt{x}}$; men, da denne Værdi af $f(x)$ ikke for enhver Værdi af x er numerisk ≥ 1 , men giver $f(0) = 0$, kan den ikke bruges til Bestemmelsen af y .

Betingelsen $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{\xi} H(\xi) = 0$, vil, naar $p > 0$, f. Ex. være opfyldt ved $H(\xi) = A\xi^{p-\frac{1}{2}}$, som giver

$f(x) = A \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{\gamma(p + \frac{1}{2})}{\gamma(p)} x^{p-1}$; men, da $p > 1$ vilde give $f(0) = 0$, maa man have $p \leq 1$. Sættes derfor $p = 1 - \alpha$, faaes

$$t = H(\xi) = A\xi^{\frac{1}{2}-\alpha} \text{ at give}$$

$$f(x) = \frac{ds}{dx} = A \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{\gamma(\frac{3}{2} - \alpha)}{\gamma(1 - \alpha)} x^{-\alpha} \text{ og } s = A \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{\gamma(\frac{3}{2} - \alpha)}{\gamma(2 - \alpha)} x^{1-\alpha}$$

men, da $f(0)$ skal være numerisk ≥ 1 , maa man, naar $\alpha = 0$, have $A^2 \geq \frac{2}{g}$. Naar denne Betingelse er opfyldt, faaes $\alpha = 0$ at give

$$t = A\sqrt{\xi} \text{ og } s = A\sqrt{\frac{1}{2}g} \cdot x, \quad y = \sqrt{\frac{1}{2}gA^2 - 1} \cdot x$$

altsaa en ret Linie gennem O .

For $\alpha = \frac{1}{2}$ faaes det tautochroniske Problem, eller

$$t = A, \text{ som giver } f(x) = \frac{A\sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ og } s = A \frac{2\sqrt{2g}}{\pi} \sqrt{x}$$

altsaa en Cykloide med horizontal Grundlinie og Toppunkt i Begyndelsespunktet O , idet man for denne Curve har $s = 2\sqrt{2a}\sqrt{x}$, naar a er den rullende Cirkels Radius. Udtrykt ved a bliver da Tiden for Faldet $t = A = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, og, betegnes Cykloidens halve Længde ved S , faaes $t = A = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{S}{g}}$, som er bekjendt.

$$t = H(\xi) = A\sqrt{\xi}(1 - l\xi) \text{ vilde give}$$

$\frac{ds}{dx} = A \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \cdot \frac{\gamma'(\frac{3}{2})}{\gamma(1)} \left\{ 1 - \left(lx + \frac{\gamma'(\frac{3}{2})}{\gamma(\frac{3}{2})} - \gamma'(1) \right) \right\}$, eller, ifølge
(s) i § 8,

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{2} A \sqrt{2g} \left(lx + 1 + \frac{\gamma'(\frac{1}{2})}{\gamma(\frac{1}{2})} - \gamma'(1) \right) \text{ og}$$

$$s = -\frac{1}{2} A \sqrt{2g} \cdot x \cdot \left(lx + \frac{\gamma'(\frac{1}{2})}{\gamma(\frac{1}{2})} - \gamma'(1) \right).$$

$$t = H(\xi) = Al\xi \text{ giver } s = 2A \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \sqrt{x} \left(lx + \gamma'(1) - \frac{\gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - 2 \right)$$

Art. 3. Bestemmelse af Functionen φ i Ligningen

$$\int_{\pm\infty}^{\xi} (\xi - x)^{m-1} \varphi(x) dx = H(\xi)$$

hvori $m > 0$ og H en bekendt Function.

Da (6) ikke er gjældende for $a = \pm\infty$, maa det ovenstaaende Integral (som er $= \Gamma(m) \frac{\partial^{-m} \varphi(\xi)}{\partial \xi^{-m}}$, naar ∂ betyder en Liouvillesk Differentiation) først transformeres ved en Substitution, der kan bringe Ligningen paa Formen I. Dette sker meget simpelt ved at sætte $x = \frac{1}{z}$ og $\xi = \frac{1}{\zeta}$, som giver

$$\begin{aligned} \int_{\pm\infty}^{\xi} (\xi - x)^{m-1} \varphi(x) dx &= \frac{(-1)^m}{\zeta^{m-1}} \int_0^{\zeta} (\zeta - z)^{m-1} \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{m+1}} dz \\ &= \frac{(-1)^m \gamma(m)}{\zeta^{m-1}} \int_0^{(m)} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m+1}} d\zeta^m \end{aligned}$$

og altsaa

$$\gamma(m) \int_0^{(m)} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m+1}} d\zeta^m = \frac{\zeta^{m-1} H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{(-1)^m}$$

hvorved Ligningen er bragt paa Formen I, idet a har faaet den

specielle Værdi 0, $\frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m+1}}$ er traadt i Stedet for $f(\zeta)$ og $\frac{\zeta^{m-1} H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{(-1)^m}$ i Stedet for $F(\zeta)$. Det Liouvilleske Integral af Ordenen m er saaledes ved Transformation bragt paa en speciel Form af $\int_a^{(m)} f(\zeta) d\zeta^m$, og hermed er det i Grunden bevist, at der ikke vil kunne gives noget Problem af denne Art, der kan løses ved Liouvilles Methode, men ikke ved min.

Naar man differentierer den sidste Ligning med Index m og derpaa i Stedet for ζ sætter $\frac{1}{x}$, faaer man

$$x^{m+1} \varphi(x) = \frac{1}{(-1)^m \gamma(m)} \left\{ \frac{d^m \cdot \zeta^{m-1} H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^m} \right\}_{\zeta = \frac{1}{x}}$$

idet der ved Parenthesen $\left\{ \right\}_{\zeta = \frac{1}{x}}$ er antydet, at man efter

den fuldstændige Differentiation med Hensyn til ζ har sat $\zeta = \frac{1}{x}$.

Det tilhørende Complement $\psi(m, \zeta) = \psi\left(m, \frac{1}{x}\right)$ bestemmes efter de i Art. 2 givne Regler. Naar en Løsning skal være mulig, maa man, ifølge (γ), idet a er $= 0$, have

$$\frac{\zeta^{m-1} H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m-1}} = H\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0 \text{ for } \zeta = 0,$$

eller $H(\xi) = 0$ for $\xi = \infty$,

saa at man f. Ex., naar $p > 0$, kunde have $H(\xi) = \frac{A}{\xi^p}$, som vilde give

$$\varphi(x) = \frac{Ax^{-m-1}}{(-1)^m \gamma(m)} \left\{ \frac{d^m \cdot \zeta^{m+p-1}}{d\zeta^m} \right\}_{\zeta = \frac{1}{x}} = \frac{A}{(-1)^m \gamma(m) \cdot \gamma(p)} \frac{1}{x^{m+p}}.$$

Ex. Man søger en Curve ($y = \varphi(x)$), som opfylder følgende Betingelse:

Naar man betragter Fodpunktet ($x = \xi, y = 0$) af Ordinaten $\varphi(\xi)$ som Toppunktet af en Parabel, hvis Ligning i Coordinaterne

x og y' er $y' = \sqrt{2\xi(x-\xi)}$, og som altsaa har sin Axe sammenfaldende med x Axen og sin Parameter $= 2\xi$, og man derefter construerer en tredje Curve (Coordinater x og y''), hvori enhver Ordinat y'' opfylder Betingelsen

$$y'' = y \cdot y' = \varphi(x) \cdot \sqrt{2\xi(x-\xi)},$$

saa skal det, i Retning af x Axen uendelige, Areal $\int_{\xi}^{\infty} y'' dx$, som indeslutes af denne tredje Curve og x Axen, for enhver Værdi ξ af x være $= H(\xi)$, idet H er en bekjendt Function

Man skal altsaa have

$$\int_{\xi}^{\infty} \varphi(x) \cdot \sqrt{2\xi(x-\xi)} \cdot dx = H(\xi)$$

eller, ved Multiplication med $-\frac{\sqrt{-1}}{2\xi}$,

$$\int_{\infty}^{\xi} (\xi-x)^{\frac{3}{2}-1} \varphi(x) dx = -\sqrt{-1} \frac{H(\xi)}{\sqrt{2\xi}},$$

som ved $x = \frac{1}{z}$ og $\xi = \frac{1}{\zeta}$ forandres til

$$\frac{(-1)^{\frac{3}{2}} \gamma^{\frac{3}{2}}}{\zeta^{\frac{3}{2}-1}} \int_0^{\frac{1}{\zeta}} \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta^{\frac{3}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} H\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

Naar denne Ligning multipliceres med $2 \frac{\zeta^{\frac{3}{2}-1}}{(-1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}$ og derpaa differentieres med Index $\frac{3}{2}$, faaer man, ved i Stedet for ζ at sætte $\frac{1}{x}$,

$$x^{\frac{5}{2}} \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{d^{\frac{3}{2}} \cdot \zeta H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^{\frac{3}{2}}} \right\}_{\zeta = \frac{1}{x}}$$

men, naar en Løsning skal være mulig, maa man have $\frac{\zeta H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{\frac{3}{2}-1}} = \sqrt{\zeta} \cdot H\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0$ for $\zeta = 0$, eller $\frac{H(\xi)}{\sqrt{\xi}} = 0$ for $\xi = \infty$.

Man kunde altsaa f. Ex., naar $p > 0$, have $H(\xi) = k\xi^{\frac{1}{2}-p}$, som vilde give $\zeta H\left(\frac{4}{\zeta}\right) = k \cdot \zeta^{p+\frac{1}{2}}$ og $y = \varphi(x) = k\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\gamma(\frac{3}{2}+p)}{\gamma(p)} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}+p}}$.

Skal Arealet $H(\xi)$ forblive constant $= k$ for enhver Værdi af ξ , saa faaes, idet $p = \frac{1}{2}$, Curvens Ligning

$$y = \varphi(x) = k \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Havde man i Stedet for Betingelsen $y'' = y \cdot y'$ havt $y'' = y \cdot (y')^{2(m-1)}$, vilde Løsningen have været ligesaa simpel, idet m vilde være traadt i Stedet for Index $\frac{3}{2}$.

Art. 4. Bestemmelsen af Functioner, forekommende i bestemte Integraler, der ere givne som bekendte Functioner af Integralernes Invariable.

Ligesom i Art. 3 maa dette Problem ved Substitution — enten for de Variable, eller for Functionen, eller ved begge Operationer i Forening, søges bragt paa Formen I.

Det vil ikke være muligt at angive nogen Hovedform for alle de bestemte Integraler, der ved Substitution kunne bringes paa Formen

$$\int_a^{\zeta} (\zeta - z)^{m-1} f(z) dz = \gamma(m) \int_a^{(m)} f(\zeta) d\zeta^m, \quad (m > 0);$$

men de følgende Formler (A) — (G), i hvilke overalt m er > 0 , vilde indeholde Exempler paa mere almindelige Former af saadanne bestemte Integraler, som kunne antages at ville kunne komme til Anvendelse.

Formlen ((6)) og simple Transformationer deraf give da først

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{\xi} (\xi - x)^{m-1} f(x) dx &= \\ \int_0^{\xi-a} x^{m-1} f(\xi - x) dx &= \gamma(m) \int_a^{(m)} f(\xi) d\xi^m \\ \int_0^{a-\xi} x^{m-1} f(\xi + x) dx &= \frac{\gamma(m)}{(-1)^m} \int_a^{(m)} f(\xi) d\xi^m \\ \int_{\frac{a}{\xi}}^1 (1-x)^{m-1} f(\xi x) dx &= \frac{\gamma(m)}{\xi^m} \int_a^{(m)} f(\xi) d\xi^m \end{aligned} \right\} (A)$$

Naar $a = \pm \infty$, forandres den sidste Formel til

$$\left. \int_{\pm \infty}^1 (1-x)^{m-1} \varphi(\xi x) dx = (-1)^m \gamma(m) \cdot \zeta \cdot \int_0^{(m)} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m+1}} d\zeta^m \right\} (B)$$

$\xi = \frac{1}{\zeta}$

De andre for $a = \pm \infty$ til Formlerne (A) svarende Formler saavel som selve den første Formel (A), og: (6) , ville være specielle Former af de følgende mere almindelige Formler (C), (C)' og (D).

Naar c^n ikke er uendelig, men c og n iøvrigt hvilket som helst Tal, faaer man, ned at sætte $x^n = z$ og $\xi^n = \zeta$, Formlen

$$\left. \int_c^{\xi} (\xi^n - x^n)^{m-1} \varphi(x) dx = \frac{\gamma(m)}{n} \int_{c^n}^{(m)} \zeta^{\frac{1}{n}-1} \varphi\left(\zeta^{\frac{1}{n}}\right) d\zeta^m \right\} (C)$$

$\xi = \zeta^{\frac{1}{n}}$ og c^n ikke uendelig

Naar c^{-n} ikke er uendelig, faaes paa samme Maade

$$\left. \int_c^{\xi} (\xi^n - x^n)^{m-1} \varphi(x) dx = \frac{(-1)^m \gamma(m)}{n \zeta^{m-1}} \int_{c^{-n}}^{(m)} \frac{\varphi\left(\zeta^{-\frac{1}{n}}\right)}{\zeta^{m+\frac{1}{n}}} d\zeta^m \right\} (C)'$$

$\xi = \zeta^{-\frac{1}{n}}$ og c^{-n} ikke uendelig

Ved $n = 1$ og $c = a$ reduceres (C) til den første (A), og: (6) ,

ligesom (C)' ved $n = 1$ og $c = \pm \infty$ reduceres til det i Art. 3 behandlede Tilfælde ($a = \pm \infty$)

Sættes $\xi^p + kx^p = \frac{1}{z}$, $\xi^p = \frac{1}{\zeta}$, faaes, naar $p > 0$, den hyppigt anvendelige Formel

$$\int_0^\infty x^{m-1} \varphi(\xi^p + kx^p) dx = \frac{\gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{p \cdot k^{\frac{m}{p}} \cdot \zeta^{\frac{m}{p}-1}} \cdot \int_0^{\left(\frac{m}{p}\right)} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{\frac{m}{p}+1}} d\zeta^{\frac{m}{p}} \left. \vphantom{\int_0^\infty} \right\} \quad (D)$$

$$\xi = \zeta^{-\frac{1}{p}}, \quad p > 0$$

som for $p = 1$ og $k = -1$, for $p = 1$ og $k = +1$, giver de til den 2den og 3die Formel (A) svarende Formler for Tilfældet $a = \pm \infty$.

De foranstaaende Formler kunne let ved Substitution, anvendt enten paa Functionen, eller paa de Variable, eller saavel paa Functionen som paa de Variable, transformeres til en Mængde af Integraler, som kunne forekomme i Anvendelserne. Paa saadanne Transformationer skulle her ikkun anføres et Par Exempler.

Naar man i Formlen (B) sætter $x = \frac{1}{\sin^2 \theta}$, $\xi = r^2$ og forandrer $\varphi(t)$ til $\frac{\varphi(\sqrt{t})}{t}$, faaer man

$$\int_{\pm s' \pi}^{\pm t' \pi + \frac{\pi}{2}} \cot^{2m-1} \theta \cdot \varphi\left(\frac{r}{\sin \theta}\right) d\theta = \frac{\gamma^{(m)}}{2} \int_0^{\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)}{\zeta^m} d\zeta^m \left. \vphantom{\int_{\pm s' \pi}} \right\} \quad (E)$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{\zeta}}$$

Sættes heri atter $\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ i Stedet for $\varphi(t)$ og $\frac{1}{r}$ i Stedet for r , faaes

$$\left. \int_{\pm s' \pi}^{\pm t' \pi + \frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \cdot \varphi(r \sin \theta) d\theta = \frac{\gamma^{(m)}}{2} \int_0^{(m)} \frac{\varphi(\sqrt{\zeta})}{\zeta^m} d\zeta^m \right\} \quad (F)$$

$$r = \sqrt{\zeta}$$

Ved i den sidste Formel (A) at sætte $a = c^2$, $\xi = r^2$, $x = \sin^2 \theta$ og $f(t) = \frac{\varphi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ faaer man

$$\left. \int_{\text{arc} \left(\sin = \pm \frac{c}{r} \right)}^{\pm t' \pi + \frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \cdot \varphi(r \sin \theta) d\theta = \frac{\gamma^{(m)}}{2 \zeta^{m-\frac{1}{2}}} \int_{c^2}^{(m)} \frac{\varphi(\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}} d\zeta^m \right\} \quad (G)$$

$$r = \sqrt{\zeta}$$

som for $m = \frac{1}{2}$ antager en meget simpel og hyppigt anvendelig Form. For $m = \frac{1}{2}$ og $c = 0$ falde de to sidste Formler sammen i een.

De foran anførte Formler, saavelsom andre deraf dannede, kunne selvfølgelig ogsaa komme til Anvendelse, naar de Ligninger, der skulle tjene til Bestemmelsen af de ubekjendte Functioner, ere af en mindre simpel Form end den hidtil forudsatte; men det Foranstaaende vil i alle Tilfælde give en tilstrækkelig Veiledning med Hensyn til Formlernes Benyttelse. Saadanne mere complicerede, men desuagtet yderst simple, Anvendelser ville findes i det følgende Ex. 3, saavelsom i Art. 5.

Naar Problemet har den hidtil forudsatte simple Form, bliver Reglen for Formlernes Anvendelse denne:

Den givne Function af ξ (eller r) forandres ved den under Formlerne anførte Substitution til en Function af ζ , og Problemet kan da bringes paa Formen I:

$$\gamma^{(m)} \int_a^{(m)} f(\zeta) d\zeta^m = F(\zeta), \text{ som giver } f(\zeta) = \frac{1}{\gamma^{(m)}} \left\{ \frac{d^m F(\zeta)}{d\zeta^m} \right\},$$

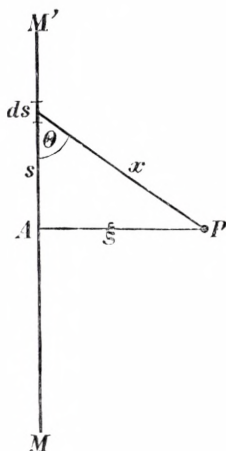
idet Differentiationen og Bestemmelsen af Complementet $\psi(m, \zeta - a)$ ske efter de i Art. 2 anførte Reg-

ler. Naar en Løsning skal være mulig, maa man have

$$\lim \frac{F(a + \varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0.$$

Ex. 1. Fig. 2. Elementet ds af den uendelige rette Linie MM'

Fig. 2.



udøver paa Punktet P , i Afstanden $PA = \xi$ fra MM' , en Tiltrækning

$$\varphi(x) \sin \theta \cdot ds = \varphi(x) \cdot \frac{\xi}{x} \cdot d\sqrt{x^2 - \xi^2} = \xi (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x) dx,$$

idet x er Elementets Afstand fra P , og θ den Vinkel, som x danner med ds , eller med s , der regnes fra A . Denne Tiltrækning staaer lodret paa Planet PMM' , og Summen af alle disse Tiltrækninger, eller Resultanten af hele Liniens Tiltrækning antages at være en given Function $H(\xi)$ af Afstanden $PA = \xi$. Man skal da finde φ af

$$2 \int_{\xi}^{\infty} \xi (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x) dx = H(\xi)$$

Integralet heri bringes paa Formen (C)', naar Ligningen

multipliceres med $-\frac{1}{2\xi\sqrt{-1}}$, og man faaer da, ifølge (C), idet $n = 2$, $m = \frac{1}{2}$ og $c = \infty$,

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}} \gamma(\frac{1}{2})}{2 \xi^{-\frac{1}{2}}} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{\varphi(\xi^{-\frac{1}{2}})}{\xi} d\xi^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{H(\xi^{-\frac{1}{2}})}{\xi^{-\frac{1}{2}}}$$

Naar denne Ligning divideres med $\frac{(-1)^{\frac{1}{2}} \gamma(\frac{1}{2})}{2\xi^{-\frac{1}{2}}}$ og derpaa differentieres med Index $\frac{1}{2}$, faaer man, ved efter Differentiationen at sætte $\frac{1}{x^2}$ i Stedet for ξ ,

$$x^2 \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{d^{\frac{1}{2}} \cdot H(\xi^{-\frac{1}{2}})}{d\xi^{\frac{1}{2}}} \right\}_{\xi = \frac{1}{x^2}}$$

hvorved φ er bestemt; men, naar en Løsning skal være mulig, maa man have $\frac{H(\xi^{-\frac{1}{2}})}{\xi^{\frac{1}{2}-1}} = \sqrt{\xi} \cdot H\left(\sqrt{\frac{1}{\xi}}\right) = 0$ for $\xi = 0$, eller $\frac{H(\xi)}{\xi} = 0$ for $\xi = \infty$.

Man kunde derfor, naar $p > 0$, f. Ex. have $H(\xi) = i \cdot \xi^{1-p}$, som, idet $H(\xi^{-\frac{1}{2}})$ bliver $= i \xi^{\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}}$, giver

$$\varphi(x) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2})}{\gamma(\frac{1}{2}p)} \cdot \frac{1}{x^p}$$

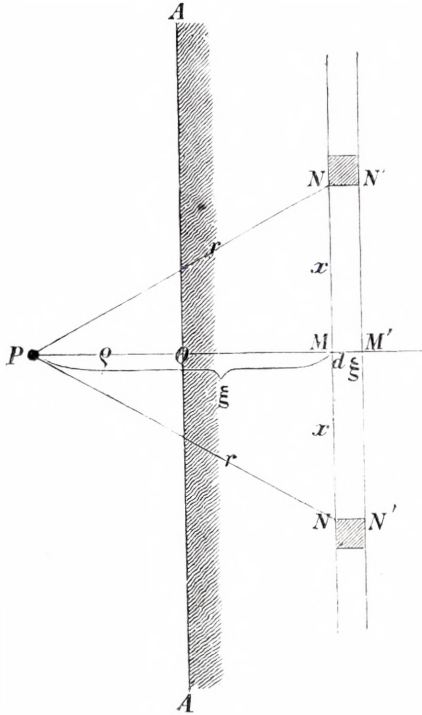
For Virkningen af en Magnetpol paa en elektrisk Strøm haves $H(\xi) = \frac{i}{\xi}$, altsaa $p = 2$, og

$$\varphi(x) = \frac{i}{2x^2}$$

Ex. 2. Fig. 3. Rummet til Høire for Planet AOA er fyldt med en Masse, hvis Dimensioner kunne betragtes som uendelige. Forsøg have vist, at et materielt Punkt P i Afstanden $PO = \rho$ fra Begrænsningsplanet bliver tiltrukket (frastødt) med en Kraft $= F(\rho)$. Tætheden af Massen er overalt

$= kx''$, idet x er Afstanden fra et Punkt N i Massen til Perpendikulæren POM fra P paa Planet AOA . Der spørges om Tiltrækningen (eller Frastødningen) $\varphi(r)$ mellem P og en Masse-

Fig. 3.



enhed N i Afstanden r fra P , idet Tiltrækningen (Frastødningen) overalt foregaaer i Retning af Afstanden mellem Masserne og er proportional med disse.

Igjennem N lægges et Plan $NMN \perp POM$. Omkring M som Centrum med $MN = x$ som Radius beskrives i Planet en Cirkel, der betragtes som Basis for en Cylinder, hvis Axe falder i POM , og hvis Høide er $MM' = NN' = d\xi$. Udenom denne Cylinderflade føres en anden med Radius $(x + dx)$ og med samme Axe og samme Høide $d\xi$. Alle Punkter i den mellem de to Cylinderflader beliggende Ring ville have samme Tæthed

kx^n og samme Afstand r fra P . Da Ringens Volumen er $= 2\pi x \cdot d\xi \cdot dx$, bliver Summen af Tiltrækningerne af alle Masseelementerne i Ringen $= 2\pi k \cdot \varphi(r) \cdot x^{n+1} \cdot d\xi \cdot dx$, og altsaa Composanten deraf, parallel med POM ,

$= 2\pi k \cdot \frac{\xi}{r} \cdot \varphi(r) \cdot x^{n+1} \cdot d\xi \cdot dx$, idet $PM = \xi$. Virkningen af den hele Masse er altsaa

$$2\pi k \int_{\rho}^{\infty} \xi d\xi \int_0^{\infty} \frac{\varphi(r)}{r} x^{n+1} dx = F(\rho)$$

som, naar man sætter

$$\int_0^{\infty} x^{n+1} \frac{\varphi(r)}{r} dx = \int_0^{\infty} x^{n+1} \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{\sqrt{\xi^2 + x^2}} dx = f(\xi),$$

faaer Formen

$$2\pi k \int_{\rho}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi = F(\rho)$$

Ved Differentiation af denne Ligning med Hensyn til ρ bliver $f(\rho)$ bestemt, og, naar man derpaa indsætter $f(\xi)$ i den næstsidste Ligning, faaer man

$$\int_0^{\infty} x^{n+1} \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{\sqrt{\xi^2 + x^2}} dx = -\frac{F'(\xi)}{2\pi k \xi}$$

Naar n er > -2 , vil Integralet heri være af Formen (D), som, idet $m = n + 2$, $p = 2$ og $k = 1$, giver

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{n+1} \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{\sqrt{\xi^2 + x^2}} dx &= \int_0^{\infty} x^{n+1} \varphi_1(\xi^2 + x^2) dx = \\ \frac{\gamma(1 + \frac{n}{2})}{2\xi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\frac{1+\frac{n}{2}}{\xi^2 + \frac{n}{2}}} \varphi_1\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi^{1+\frac{n}{2}} &= \frac{\gamma(1 + \frac{n}{2})}{2\xi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\frac{1+\frac{n}{2}}{\xi^{\frac{n+3}{2}}}} \varphi(\xi^{-\frac{1}{2}}) d\xi^{1+\frac{n}{2}} \\ &= -\frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{2\pi k} F'(\xi^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Naar man multiplicerer denne sidste Ligning med $\frac{2 \zeta^{\frac{n}{2}}}{\gamma(1 + \frac{n}{2})}$, differentierer med Index $(1 + \frac{n}{2})$ og derpaa forandrer ζ til $\frac{1}{r^2}$, faaer man

$$r^{n+3} \varphi(r) = - \frac{1}{\pi k \cdot \gamma(1 + \frac{n}{2})} \left\{ \frac{d^{1 + \frac{n}{2}} \zeta^{\frac{n+1}{2}} F'(\zeta^{-\frac{1}{2}})}{d\zeta^{1 + \frac{n}{2}}} \right\}_{\zeta = \frac{1}{r^2}}$$

hvorved $\varphi(r)$ er bestemt; men, naar en Løsning skal være mulig, maa man have

$$\frac{\zeta^{\frac{n+1}{2}} F'(\zeta^{-\frac{1}{2}})}{\zeta^{1 + \frac{n}{2} - 1}} = \zeta^{\frac{1}{2}} F'(\zeta^{-\frac{1}{2}}) = 0 \text{ for } \zeta = 0, \text{ eller}$$

$$\frac{F'(\rho)}{\rho} = 0 \text{ for } \rho = \infty.$$

Man kunde altsaa f. Ex., naar $p > 0$, have

$$F(\rho) = \frac{A}{\rho^{p-2}} + C, \text{ som giver}$$

$$\varphi(r) = \frac{p-2}{\pi k} \frac{\gamma(1 + \frac{n}{2} + \frac{p}{2})}{\gamma(1 + \frac{n}{2}) \cdot \gamma(\frac{p}{2})} \frac{A}{r^{1+n+p}}$$

Havde man givet $F(\rho) = A \cdot l\rho + C$, vilde man faae

$$\varphi(r) = - \frac{1 + \frac{n}{2}}{\pi k} \frac{A}{r^{n+3}}$$

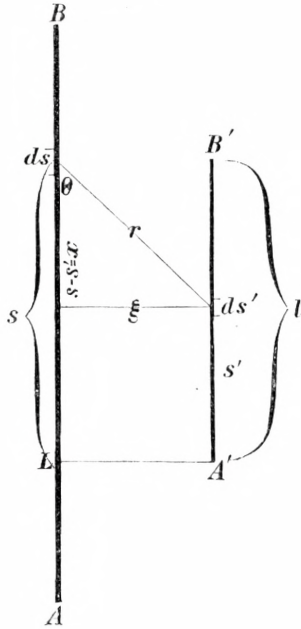
Ex. 3. Fig. 4. De forskjellige Elementer ds af en uendelig ret Linie AB udøve paa Elementerne ds' af en endelig ret Linie $A'B'$, som er $\neq AB$ og har en Længde $A'B' = l$, en Virkning, hvis Retning gaaer efter r (Afstanden mellem ds og ds'), og som er =

$$\varphi(r) \cdot (1 + (k-1) \cos^2 \theta) ds \cdot ds',$$

idet θ er Vinklen mellem r og de 2 parallelle rette Linier. Til Bestemmelsen af den ubekjendte Function φ tjener, at Re-

sultanten af alle disse Virkninger kan udtrykkes ved $\frac{i \cdot l}{\xi}$, idet i er en Constant og ξ Afstanden mellem AB og $A'B'$.

Fig. 4.



Da Resultanten er Summen af de enkelte Virkninger Componenter, perpendicularære paa de 2 parallelle Linier, maa man altsaa have

$$\int_0^l ds' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r) \cdot (1 + (k-1) \cos^2 \theta) \sin \theta \cdot ds = \frac{i \cdot l}{\xi}$$

Sættes $s - s' = x$, $ds = dx$, haves ifølge Figuren

$$r = \sqrt{\xi^2 + x^2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{x^2}{\xi^2 + x^2}, \quad \sin \theta = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + x^2}}$$

som, indsatte i ovenstaaende Ligning, give — efterat Integrationen med Hensyn til s' er bleven udført —

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{V\xi^2 + x^2} dx + (k-1) \int_0^{\infty} x^2 \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{(\xi^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{i}{2\xi^2}$$

De heri forekommende Integraler ere af Formen (D), som, naar man sætter

$$\frac{\varphi(\sqrt{t})}{Vt} = \varphi_1(t) \text{ og } \frac{\varphi(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}} = \varphi_2(t) \text{ giver}$$

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(\xi^2 + x^2) dx = \frac{\gamma(\frac{1}{2})}{2\xi^{-\frac{1}{2}}} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{\varphi_1(\frac{1}{\xi})}{\xi^{\frac{1}{2}}} d\xi^{\frac{1}{2}} = \frac{V\pi}{2} V\xi \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{\varphi(V\frac{1}{\xi})}{\xi} d\xi^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{og } \int_0^{\infty} x^2 \varphi_2(\xi^2 + x^2) dx = \frac{\gamma(\frac{3}{2})}{2\xi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{(\frac{3}{2})} \frac{\varphi_2(\frac{1}{\xi})}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi^{\frac{3}{2}} = \frac{V\pi}{4V\xi} \int_0^{(\frac{3}{2})} \frac{\varphi(V\frac{1}{\xi})}{\xi} d\xi^{\frac{3}{2}}$$

idet $\xi = \zeta^{-\frac{1}{2}}$. Naar disse Udtryk indføres i den ovenstaaende Ligning, og denne derpaa multipliceres med $\frac{2}{V\pi V\xi}$, faaes, idet

$$\frac{i}{2\xi^2} = \frac{i}{2} \zeta,$$

$$\int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{1}{\xi} \varphi(V\frac{1}{\xi}) d\xi^{\frac{1}{2}} + \frac{k-1}{2\xi} \int_0^{(\frac{3}{2})} \frac{1}{\xi} \varphi(V\frac{1}{\xi}) d\xi^{\frac{3}{2}} = \frac{i}{V\pi} \zeta^{\frac{1}{2}}$$

som, naar man sætter $\int_0^{(\frac{3}{2})} \frac{1}{\xi} \varphi(V\frac{1}{\xi}) d\xi^{\frac{3}{2}} = u$, reduceres til

$$\frac{du}{d\xi} + \frac{k-1}{2\xi} u = \frac{i}{V\pi} \zeta^{\frac{1}{2}}$$

der ved Integration giver

$$u = \int_0^{(\frac{3}{2})} \frac{1}{\xi} \varphi(V\frac{1}{\xi}) d\xi^{\frac{3}{2}} = \frac{2i}{(k+2)V\pi} \zeta^{\frac{3}{2}} + C \zeta^{\frac{1-k}{2}}$$

Ved Differentiation med Index $\frac{3}{2}$ erhoides da endelig heraf

$$\frac{1}{\zeta} \varphi \left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}} \right) = r^2 \varphi(r) = \left\{ \frac{d^{\frac{3}{2}}}{d\zeta^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{2i}{(k+2)\sqrt{\pi}} \zeta^{\frac{3}{2}} + C \zeta^{\frac{1-k}{2}} \right) \right\}_{\zeta = \frac{1}{r^2}}$$

men, naar en Løsning skal være mulig, maa man, ifølge (γ), have $\lim \left(\frac{2i}{(k+2)\sqrt{\pi}} \varepsilon + C \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}k} \right) = C \cdot \lim \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}k} = 0$, saa at man, naar k er > 0 , maa tage $C = 0$. Man vil derfor ved at udføre Differentiationen med Index $\frac{3}{2}$ og sætte

$$C \frac{\gamma^{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}k\right)}}{\gamma^{\left(-\frac{1}{2}k\right)}} = K,$$

$$\text{for } k > 0 \text{ erholde } \varphi(r) = \frac{3i}{2(k+2)} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\text{og for } k < 0 \text{ erholde } \varphi(r) = \frac{3i}{2(k+2)} \cdot \frac{1}{r^2} + K \cdot \frac{1}{r^{-k}}$$

hvori K er en arbitrær Constant.

Ex. 4. Fig. 4. De materielle Elementer ds af den uendelige rette Linie AB udøve paa Elementerne ds' af den materielle, med AB parallelle, rette Linie $A'B'$, hvis Længde er $= l$, en Tiltrækning (Frastødning), som foregaaer i Retningen af og afhænger af Afstanden r mellem Elementerne ds og ds' og er proportional med disses Masser. Tætheden i AB er $= 1$ og i $A'B' = F(s')$, idet F er en bekjendt Function. Tiltrækningen mellem ds og ds' er altsaa $= \varphi(r) \cdot ds \cdot F(s') ds'$. — Hvorledes bestemmes φ , naar Iagttagelser have givet, at den indbyrdes Paavirkning af de to rette Linier AB og $A'B'$ er $= H(\xi) \cdot \int_0^l F(s') ds'$, idet $H(\xi)$ er en bekjendt Function af Liniernes indbyrdes Afstand ξ , og $\int_0^l F(s') ds'$ er Massen af Linien $A'B'$?

Man faaer

$$2 \int_0^l F(s') ds' \cdot \int_0^\infty \xi \frac{\varphi(r)}{r} ds = H(\xi) \cdot \int_0^l F(s') ds', \text{ eller}$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{\sqrt{\xi^2 + x^2}} dx = \frac{H(\xi)}{2\xi}, \text{ som, ifølge Formlen (D), giver}$$

$$\frac{\gamma(\frac{1}{2})}{2} \zeta^{\frac{1}{2}} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{1}{\zeta} \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) d\zeta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \zeta^{\frac{1}{2}} H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)$$

hvoraf man ved Multiplication med $\frac{2}{\gamma(\frac{1}{2})} \zeta^{-\frac{1}{2}}$ og Differentiation med Index $\frac{1}{2}$ faaer

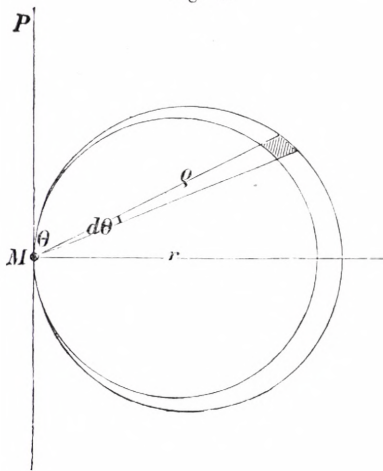
$$\frac{1}{\zeta} \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = r^2 \varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{d^{\frac{1}{2}} \cdot H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)}{d\zeta^{\frac{1}{2}}} \right\}_{\zeta = \frac{1}{r^2}}$$

Herved er $\varphi(r)$ bestemt, idet man dog maa have $\frac{H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)}{\zeta^{\frac{1}{2}-1}} = \sqrt{\zeta} \cdot H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = 0$ for $\zeta = 0$, eller $\frac{H(\xi)}{\xi} = 0$ for $\xi = \infty$. Man kunde derfor f. Ex., naar $p > 0$, have

$$H(\xi) = A\xi^{1-p}, \text{ som vilde give } \varphi(r) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \frac{1}{r^p}$$

Ex. 5. Fig. 5. Efter hvilken Function $\varphi(\rho)$ af Afstanden ρ bliver et materielt Punkt M tiltrukket af Punkterne i et Plan,

Fig. 5.



naar det er givet, at Resultanten af Tiltrækningerne af alle de Punkter, der ligge indenfor en Cirkel, gaaende igjennem M , er en given Function $H(r)$ af Cirkelns Diameter r .

Igjennem M drages en ret Linie MP og 2 Cirkler, der begge tangere MP i M . Naar disse Cirklers Diametre ere henholdsvis r og $(r + dr)$, vil det imellem de 2 Cirkelperipherier beliggende Areal paa Punktet M udøve en Tiltrækning

$$H(r + dr) - H(r) = H'(r) \cdot dr$$

Naar M tages til Pol og MP til Polaxe, vil den første Cirkels Ligning være

$$\rho = r \sin \theta$$

saa at Arealet af det uendeligt lille Fladeelement, som indeluttes af de 2 Cirkler og af 2 *radii vectores*, dragne henholdsvis under Vinklerne θ og $(\theta + d\theta)$ med MP , vil være

$$\rho d\theta \cdot \frac{d\rho}{dr} dr = r \sin \theta d\theta \cdot \sin \theta dr = r \sin^2 \theta \cdot d\theta \cdot dr$$

Den Tiltrækning, som de indenfor dette Areal beliggende Punkter udøve paa M , vil altsaa være $= r \sin^2 \theta \cdot d\theta \cdot dr \cdot \varphi(\rho)$, og denne Tiltræknings Composant $\perp PM$ bliver

$$r \sin^3 \theta \cdot \varphi(r \sin \theta) \cdot d\theta \cdot dr$$

Tiltrækningen af hele det imellem de 2 Cirkelperipherier beliggende Areal er altsaa

$$2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin^3 \theta \cdot \varphi(r \sin \theta) \cdot d\theta = H'(r) \cdot dr$$

Det heri forekommende Integral bringes paa Formen (G) hvori $m = \frac{1}{2}$ og $c = 0$, naar man multiplicerer Ligningen med $\frac{r^2}{2 dr}$. Man faaer da ifølge (G)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \sin \theta)^3 \cdot \varphi(r \sin \theta) \cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(r \sin \theta) d\theta =$$

$$\frac{\gamma^{(\frac{1}{2})}}{2} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{\varphi_1(\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}} d\zeta^{\frac{1}{2}} = \frac{\gamma^{(\frac{1}{2})}}{2} \int_0^{(\frac{1}{2})} \zeta \varphi(\sqrt{\zeta}) d\zeta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \zeta H'(\sqrt{\zeta})$$

Differentiation med Index $\frac{1}{2}$ giver derpaa

$$\zeta \varphi(\sqrt{\zeta}) = \rho^2 \varphi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{d^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta H'(\sqrt{\zeta})}{d\zeta^{\frac{1}{2}}} \right\}_{\zeta=\rho^2}$$

hvorved $\varphi(\rho)$ er bestemt; men, naar en Løsning skal være mulig, maa man have $\frac{\zeta H'(\sqrt{\zeta})}{\zeta^{\frac{1}{2}-1}} = \zeta^{\frac{3}{2}} H'(\sqrt{\zeta}) = 0$ for $\zeta = 0$, eller $r^3 H'(r) = 0$ for $r = 0$. Man kunde derfor, naar $p > 0$, have

$$H(r) = C + Ar^{p-2}, \text{ som giver}$$

$$\varphi(\rho) = A \frac{\rho^{-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma^{(\frac{p+1}{2})}}{\gamma^{(\frac{p}{2})}} \rho^{p-4}$$

Er $H(r) = Ar$, \circ : Tiltrækningen proportional med Cirkelns Diameter, bliver altsaa, idet $p = 3$,

$$\varphi(r) = \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{1}{\rho}$$

\circ : omvendt proportional med Afstanden.

Er $H(r) = Ar^2$, \circ : Tiltrækningen proportional med Cirkelns Areal, bliver, idet $p = 4$,

$$\varphi(\rho) = \frac{3}{2} A$$

altsaa constant, uafhængig af r , hvilket kunde forudses.

Er $H(r) = B \cdot \ln r + C$, bliver, idet $\zeta H'(\zeta) = B\zeta^{\frac{1}{2}}$,

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2} B \cdot \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}$$

altsaa omvendt proportional med Afstandens Kvadrat.

Hvis man i Stedet for en hel Cirkel havde havt en af dennes Diameter afhængig Del af Cirkelens Areal, indsluttet mellem de 2 radii vectores til $\theta = \arcsin\left(\frac{c}{r}\right)$ og $\theta = \pi - \arcsin\left(\frac{c}{r}\right)$, og Tiltrækningen af dette Areal var givet $= H(r)$, maatte det Integral, som udtrykker den halve Tiltræktræknings Composant $\perp PM$ af Arealet mellem de 2 Cirkelperipherier, have været taget mellem Grændserne $\arcsin\left(\frac{c}{r}\right)$ og $\frac{\pi}{2}$ i Stedet for mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$, hvorved Formlen (G) med c^2 i Stedet for 0 vilde være kommen til Anvendelse. Betingelsen for Opgavens Løsning vilde da have været

$$\lim_{\varepsilon^{\frac{1}{2}-1}} (c^2 + \varepsilon) H'(\sqrt{c^2 + \varepsilon}) = 0, \text{ saa at man, naar } p > 0, \text{ kunde have } r^2 H'(r) = A(r^2 - c^2)^{p-\frac{1}{2}}, \text{ som vilde give } \varphi(\rho) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2})}{\Gamma(p)} \frac{(\rho^2 - c^2)^{p-1}}{\rho^2}, \text{ idet Differentiationen med Index } \frac{1}{2} \text{ udføres med Hensyn til } (\zeta - c^2).$$

Art. 5. Integration af lineære Differentialligninger af hvilken-somhelst (brudnen) Orden. Anvendelser.

I 1ste Hovedafsnits § 11 har jeg som et Exempel paa Integration af lineære Differentialligninger af brudnen Orden behandlet den lineære Ligning

$$\frac{d^m y}{dx^m} + a x^n y = 0 \quad \text{III}$$

og fremstillet dens fuldstændige Integral.

Integrationen af III udførtes ved at sætte

$$y = x^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} x^{i'p}$$

og man fandt da det fuldstændige Integral at være

$$\left. \begin{aligned} \text{idet} \quad y &= x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \cdot \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{A_{i'}}{C_{r'}} x^{i'(m+n)} \\ A_{i'} &= - \frac{\gamma(i'm + i'n - r')}{\gamma((i'+1)m + i'n - r')} a A_{i'-1} \end{aligned} \right\} \text{III'}$$

og A_0 , der forbliver arbitrær ved enhver Værdi af $r' = 0, 1, 2, \dots, \infty$, er betegnet ved $C_{r'}$.

Er $m = -n$, faaer man

$$\left. \begin{aligned} \text{idet } q \text{ er Rod i Ligningen} \quad y &= \sum C_q x^q \\ \frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1-m)} &= \frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1+n)} = -a \end{aligned} \right\} \text{III''}$$

som for $m = \pm m'$ antager den simple Form $\frac{a^q}{a^q \pm m'^q} = -a$.

Den Række, der fremstiller det fuldstændige Integral for $n \begin{cases} > \\ < \end{cases} -m$, vil, naar m er positiv hel, $= m'$, antage en simple Form, idet r' da ikkun faaer Værdierne $0, 1, 2, \dots, (m' - 1)$; men Rækken vil ogsaa ved specielle Værdier af n kunne antage en simple Form, eller vel endog for specielle Værdier af r' kunne summeres under endelig Form. Man vil saaledes finde, at, naar $m = \frac{1}{2}$ og $n = -1$, bliver Rækken for $r' = 0$ reduceret til

$$y = C x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{x}}$$

som altsaa er et particulært Integral i

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{x} y = 0$$

Dette Resultat kunde man være kommet lettere til; thi Ligningen er en speciel Form af

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{p^\mu}{(x-a)^{2\mu}} y \tag{\epsilon}$$

som, ifølge (δ) i Art. 1, har det particulære Integral

$$y = C(x-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}}; (p > 0) \tag{\epsilon'}$$

Ligeledes faaes af Formlen (β) et particulært Integral af

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^{-(m'+\mu)} y}{dx^{-(m'+\mu)}} &= \frac{(x-a)^{2(m'+\mu)}}{p^{m'+\mu}} y \\ \text{at være} & \\ y &= \frac{C}{(x-a)^{m'+\mu+1}} e^{-\frac{p}{x-a}}; (p > 0) \end{aligned} \right\} (\zeta)$$

I Formlerne (ε) og (ζ) vil høire Side af Ligningen kunne have dobbelt Tegn (\pm), naar μ er en ægte Brøk med lige Nævner.

Mere almindeligt kan man af Ligningen

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{p^m}{(x-a)^{2m}} y$$

hvori m er et hvilket som helst positivt, eller negativt Tal, slutte, at et particulært Integral y maa kunne tænkes at have Formen $\psi(-m, x-a) = (x-a)^{m-1} \sum C_r (x-a)^{-r}$ med bestemte Værdier for Constanterne; thi $\frac{d^m y}{dx^m}$ maa da enten være $= 0$, eller alene indeholde Led af Complementet $\psi_1(m, a-x) = (x-a)^{-m-1} \sum K_r (x-a)^{-r}$, medens $\frac{k}{(x-a)^{2m}} y = p^m (x-a)^{-m-1} \sum C_r (x-a)^{-r}$ bliver af samme Form. Saaledes vil f. Ex. $m = 1$ give $y = C e^{-\frac{p}{x-a}} = C(x-a)^{-1} \sum \frac{(-k)^{r'}}{[r']}$ $(x-a)^{-r'}$; $m = -1$ give $y = C(x-a)^{-1-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$. Forøvrigt er det af Hr. Professor Steens Undersøgelser bekendt, at Ligningen for m positiv hel, $= m'$, er fuldstændigt integreret ved

$$y = \sum_{s'=1}^{s'=m'} C_{s'} (x-a)^{m'-1} e^{-\frac{\alpha_{s'} p}{x-a}}$$

idet $\alpha_{s'}$ er een af de m' Rødder af Enheden.

Dette Resultat kan let udledes af den fundne fuldstændige Integration af III, som for $m = m'$ og $n = -2m'$ bliver

$$\frac{d^{m'} y}{dx^{m'}} = -a x^{-2m'} y \quad (\eta)$$

Sættes $a = -p^{m'}$, altsaa $p = 1 \frac{m'}{m'} \sqrt{-a} = \alpha_{s'} \cdot \sqrt{-a}$, faaes det almindelige particulære Integral

$$y = C_{r'} x^{m'-1} \sum_{i'=1}^{i'=\infty} \frac{A_{i'}}{C_{r'}} \frac{1}{x^{i'm'+r'}}, \text{ idet}$$

$$A_{i'} = \frac{\gamma(-(i'm'+r'))}{\gamma(-((i'-1)m'+r'))} p^{m'} A_{i'-1} = \frac{[(i'-1)m'+r']}{[i'm'+r']} (-p)^{m'} A_{i'-1},$$

hvoraf man finder

$$A_{i'} = \frac{(-p)^{i'm'}}{[i'm'+r']} [r'] A_0 = \frac{(-p)^{i'm'+r'}}{[i'm'+r']} C_{r'}$$

saa at det almindelige particulære Integral bliver

$$y = C_{r'} x^{m'-1} \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{1}{[i'm'+r']} \left(-\frac{p}{x}\right)^{i'm'+r'}, \text{ idet } r' = 0, 1, 2, \dots (m'-1).$$

Heraf kan man danne et nyt particulært Integral ved at sætte $C_0 = C_1 = C_2 = \dots = C_{m'-1} = K_{s'}$ og summere disse m' Integraler. Derved faaes

$$y = K_{s'} x^{m'-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']^{r'}} \left(-\frac{p}{x}\right)^{r'} = K_{s'} x^{m'-1} e^{-\frac{\alpha s' \sqrt{-a}}{x}}$$

og det fuldstændige Integral

$$y = x^{m'-1} \sum_{s'=1}^{s'=m'} K_{s'} e^{-\frac{\alpha s' \sqrt{-a}}{x}} \quad (7)'$$

hvor i altsaa $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m'}$ ere de m' Værdier af $1 \frac{1}{m'}$.

Naar $(m+n)$ i III er $= -p'$, (negativ hel), og m ikke $= m' \leq p'+r'$, giver III' $A_{i'} = \pm \infty$; men man vil da kunne forandre Fortegnet for $(m+n)$ og m ved at sætte $\frac{d^m y}{dx^m} = z$ og $y = \left\{ \frac{d^{-m} z}{dx^{-m}} \right\}$.

Naar $(m+n) = p'$, α : positiv hel, vil III' ikkun kunne give p' particulære Integraler, svarende til $r' = 0, 1, 2, \dots (p'-1)$; thi $r' \geq p'$ vilde give $A_1 = \pm \infty$. Man vil dog i dette Tilfælde let af III' kunne slutte sig til en almindeligere Form for Integralet, hvorved der til enhver af de p' Værdier $0, 1, 2, \dots (p'-1)$ af r' vil svare et particulært Integral med 2 arbitrære Constanter $C_{r'}$ og $C'_{r'}$, saa at Summen af disse p' particulære Integraler giver et Integral med $2p'$ arbitrære Constanter. Sættes nemlig i III, der antager Formen

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^m y}{dx^m} + a x^{-m+p'} y = 0, \\ y = x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=p'-1} x^{-r'} \left(C_{r'} x^{-p'} + \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}^{(r')} x^{i'p'} + l x \sum_{i'=0}^{i'=\infty} B_{i'}^{(r')} x^{i'p'} \right) \end{aligned} \right\} \text{III. a}$$

faaes, ifølge (5) og (10), af det almindelige particulære Integral

$$\begin{aligned} x^{1+r'} \frac{d^m y}{dx^m} &= C_{r'} \frac{\gamma(m-p'-r')}{\gamma(-p'-r')} x^{-p'} \\ &+ \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}^{(r')} \frac{\gamma(m+i'p'-r')}{\gamma(i'p'-r')} x^{i'p'} + \\ &\sum_{i'=0}^{i'=\infty} B_{i'}^{(r')} \frac{\gamma(m+i'p'-r')}{\gamma(i'p'-r')} x^{i'p'} \left(l x + \frac{\gamma'(m+i'p'-r')}{\gamma(m+i'p'-r')} - \frac{\gamma'(i'p'-r')}{\gamma(i'p'-r')} \right) \end{aligned}$$

og

$$x^{1+r'} a x^{-m+p'} y = C_{r'} a + \sum_{i'=0}^{i'=\infty} a A_{i'}^{(r')} x^{(i'+1)p'} + l x \sum_{i'=0}^{i'=\infty} a B_{i'}^{(r')} x^{(i'+1)p'}$$

I den ved Summen af disse 2 Ligninger, ifølge den første III. a, dannede Betingelse, vil, naar m ikke er positiv hel, eller negativ hel, Coefficienten til $x^{-p'}$ være = 0. Dernæst give Coefficienterne til x^0 , til $x^{i'p'}$ $l x$ og $x^{i'p'}$ henholdsvis Betingelserne

$$C_{r'} a - B_0^{(r')} \gamma(m-r') \frac{\gamma'(-r')}{(\gamma(-r'))^2} = 0,$$

eller, ifølge (11) i § 8

$$\left. \begin{aligned} B_0^{(r')} &= -a \frac{(-1)^{r'}}{[r'] \cdot \gamma(m-r')} C_{r'}, \\ B_{i'}^{(r')} &= -a \frac{\gamma(i'p'-r')}{\gamma(m+i'p'-r')} B_{i'-1}^{(r')} \text{ og} \\ A_{i'}^{(r')} &= -a \frac{\gamma(i'p'-r')}{\gamma(m+i'p'-r')} A_{i'-1}^{(r')} - \\ &B_{i'}^{(r')} \left(\frac{\gamma'(m+i'p'-r')}{\gamma(m+i'p'-r')} - \frac{\gamma'(i'p'-r')}{\gamma(i'p'-r')} \right); \quad A_0^{(r')} C_{r'} \end{aligned} \right\} \text{III'. a}$$

hvorved alle Coefficienterne $A_{i'}^{(r')}$ og $B_{i'}^{(r')}$ haves udtrykte ved de 2 arbitrære Constanter $C_{r'}$ og $C_{r'}$. Sættes $C_{r'} = 0$, falder Integralet sammen med III'. I de foranstaaende Formler kan p' ikke være = 0; men ved denne Værdi af p' haves det i III' angivne Integral.

Naar $m = m'$ (\therefore positiv hel), og $p' \geq m'$, vil III' give det fuldstændige Integral af III, hvori $n = -m' + p'$.

Naar $m = m'$, og $p' \leq m' - 1$, faaes Integralet af III. a; men Betingelsen $r' \leq p' - 1$ er da ikke tilstrækkelig; thi, for at Coefficienten til $x^{-p'}$ i dette Tilfælde skal kunne blive $= 0$, maa man have $r' \leq m' - 1 - p'$.

Man maa altsaa, naar $m = m'$, og $p' \leq m' - 1$, have $r' \leq p' - 1$, eller $r' \leq m' - 1 - p'$, eftersom $m' \geq 2p'$. Formlerne III'. a antage da, ifølge Formlen (3)' i § 8, Formen

$$\left. \begin{aligned} B_0^{(r')} &= -a \frac{(-1)^{r'}}{[r'] [m' - 1 - r']} C_{r'}, \\ B_{i'}^{(r')} &= -a \frac{[i' p' - 1 - r']}{[m' + i' p' - 1 - r']} B_{i'-1}^{(r')} \text{ og} \\ A_{i'}^{(r')} &= -a \frac{[i' p' - 1 - r']}{[m' + i' p' - 1 - r']} A_{i'-1}^{(r')} - \\ B_{i'-1}^{(r')} & \sum_{t'=0}^{t'=m'-1} \frac{1}{t' + i' p' - r'}; \quad A_0^{(r')} = C_{r'} \end{aligned} \right\} \text{III''. a}$$

Naar $m' = 2p'$, falde de 2 høiere Grænseværdier for r' sammen, saa at r' ligesom i det almindelige Tilfælde III'. a, altid kan have de p' Værdier af 0, 1, 2, ... ($p' - 1$). Ligningen

$$\frac{d^{2p'} y}{dx^{2p'}} + ax^{-p'} y = 0 \tag{III. b}$$

vil derfor være fuldstændigt integreret ved

$$\left. \begin{aligned} y &= x^{2p'-1} \sum_{r'=0}^{r'=p'-1} x^{-r'} \left(C_{r'} x^{-p'} + \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}^{(r')} x^{i'p'} + \sum_{i'=0}^{i'=\infty} B_{i'}^{(r')} x^{i'p'} \right) \\ B_{i'}^{(r')} &= \frac{(-a)^{i'+1}}{[(i'+1)p'-1-r'] [(i'+2)p'-1-r']} \cdot \frac{(-1)^{r'} [p'-1-r']}{[r']} C_{r'} \\ A_{i'}^{(r')} &= -a \frac{[i' p' - 1 - r']}{[(i'+2)p'-1-r']} A_{i'-1}^{(r')} - B_{i'}^{(r')} \sum_{t'=0}^{t'=2p'-1} \frac{1}{t' + i' p' - r'}; \quad A_0^{(r')} = C_{r'} \end{aligned} \right\} \text{III'. b}$$

som giver en i Almindelighed meget stærkt convergerende Række. Den arbitrære Constant $C_{p'-1}$ er Værdien af y for $x = 0$.

En lineær Differentialligning af brudten Orden af Formen

$$\Sigma a_{i'}(x+c)^{n_{i'}} \frac{d^{m_{i'}} y}{dx^{m_{i'}}} = 0 \quad \text{IV}$$

vil ofte kunne integreres ved den i § 11 til Integrationen af III anvendte Fremgangsmaade, altsaa ved at sætte

$$y = (x+c)^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}(x+c)^{i'p},$$

hvilken Substitution navnlig vil være anvendelig, naar Ligningens Led kunne deles i 2 Grupper, saaledes beskafne, at $(n_{i'} - m_{i'})$ er constant i hver Gruppe for sig. Selvfølgelig ville specielle Værdier af Potensexponenter og Differentiationsindices kunne fordre, at Ligningen først transformeres ved en Forandring af Fortegnet for dens Orden (se Slutningen af § 11), eller de ville kunne bevirke, at Integrationsmetoden ikkun fører til partielle Integraler. Det sidste Tilfælde viser sig f. Ex. ved Integrationen af Ligningen (c) i det følgende Ex. 2.

Naar $(n_{i'} - m_{i'})$ er $= n$, a : constant i alle Led af IV, vil Ligningen, efter Division med $(x+c)^n$, antage Formen

$$\left. \begin{aligned} &\Sigma a_{i'}(x+c)^{m_{i'}} \frac{d^{m_{i'}} y}{dx^{m_{i'}}} = \\ a_0(x+c)^{m_0} \frac{d^{m_0} y}{dx^{m_0}} + a_1(x+c)^{m_1} \frac{d^{m_1} y}{dx^{m_1}} + \dots = 0 \end{aligned} \right\} \text{V}$$

af hvilken Ligning Ligningen III for $n = -m$ vil være en speciel Form. Den oven anførte Substitution giver da ogsaa for V Integralet

$$\left. \begin{aligned} &y = \Sigma A_q(x+c)^q \\ \text{idet de forskellige Værdier af } q \text{ erhoides} \\ &\text{som Rødder i Ligningen} \\ &\Sigma a_{i'} \frac{\gamma(1+q)}{\gamma(1+q-m_{i'})} = \\ \gamma(1+q) \left(\frac{a_0}{\gamma(1+q-m_0)} + \frac{a_1}{\gamma(1+q-m_1)} + \dots \right) = 0 \end{aligned} \right\} \text{V'}$$

som i Almindelighed maa løses ved Hjælp af Formlerne (3) og (4), eller (4)' i Forbindelse med Tabellerne over Γ Functionen. Herved vil man dog i Reglen kun kunne vente at bestemme de reelle Rødder; men, naar $m_{i'} = \pm m'_{i'}$, α : naar Ordenen af Ligningen er positiv, eller negativ hel, antager den anden Ligning V' , ifølge (3), den simplere Form

$$\sum a_{i'} \frac{q^n}{q \mp m'_{i'}} = 0,$$

saa at, naar man betegner det største af Tallene $m'_{i'}$ ved m' , q bliver Rod i en algebraisk Ligning af Graden m' .

Dette Resultat er bekendt for $m_{i'} = + m'_{i'}$, idet Ligningen til Bestemmelsen af q , ifølge (2), bliver

$$\sum a_{i'} q(q-1)(q-2)\dots(q-(m'_{i'}-1)) = 0,$$

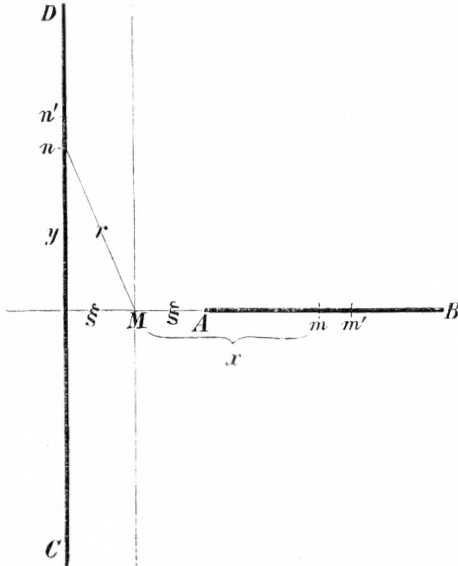
og Integrationen af V ved V' frembyder saaledes en ret mærkelig Generalisation af den Integration, som er bekendt, naar Ordenen af V er positiv hel.

Naar Ordenen af V er negativ hel, $m_{i'} = - m'_{i'}$, bliver q bestemt ved

$$\sum \frac{a_{i'}}{(q+m_{i'})\dots(q+2)(q+1)} = 0$$

Ex. 1. Fig. 6. Et materielt Punkt M (i de retvinklede Coordinaters Begyndelsespunkt) bliver paavirket af Elementerne mn' i en materiel uendelig ret Linie CD , parallel med y Axen og i en Afstand ξ til Venstre af denne, samt af Elementerne mm' i en, i Retning af B uendelig, ret Linie AB , beliggende i x Axen og med sit Endepunkt A i Afstanden $MA = \xi$ til Høire af Begyndelsespunktet. Efter hvilken Function $\varphi(r)$ af Afstanden r maa Tiltrækningen (Frastødningen) virke, naar Forsøg have givet, at Forholdet mellem Virkningerne af CD og AB er $= k$, α : constant, uafhængigt af ξ ?

Fig. 6.



Virkningen af $nn' = dy$ er $\varphi(r)dy = \varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2}) dy$, og denne Virknings Component, parallel med x Axen, er $\frac{\xi \cdot \varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} dy$. Hele Virkningen af CD paa M er altsaa

$$2\xi \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} dy$$

Den af Elementet $mm' = dx$ udøvede Paavirkning er $= \varphi(x)dx$, saa at hele Virkningen af AB bliver

$$\int_{\xi}^{\infty} \varphi(x) dx$$

Functionen φ skal altsaa bestemmes af

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} dy = -\frac{k}{2\xi} \int_{\infty}^{\xi} \varphi(x) dx$$

Venstre Side af denne Ligning kan — paa samme Maade som i Ex. 3 i Art. 4 — bringes paa Formen (D), og man faaer da, idet $\zeta = \frac{1}{\xi^2}$, $z = \frac{1}{x^2}$, $dx = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}dz$,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta^{\frac{1}{2}} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{1}{\zeta} \varphi\left(V\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} k \zeta^{\frac{1}{2}} \int_0^{\zeta} \varphi\left(V\frac{1}{z}\right) \cdot z^{-\frac{3}{2}} dz$$

Naar man differentierer denne Ligning med Hensyn til ζ og sætter

$$\frac{1}{\zeta} \varphi\left(V\frac{1}{\zeta}\right) = u$$

faaer man

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}u}{d\zeta^{\frac{1}{2}}} - \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \zeta^{-\frac{1}{2}} u = 0$$

som er af Formen V, eller af Formen III for $n = -m = -\frac{1}{2}$. Ligningen vil derfor være integreret ved

$$u = \frac{1}{\zeta} \varphi\left(V\frac{1}{\zeta}\right) = \Sigma C_q \zeta^q, \text{ eller}$$

$$\varphi(r) = \Sigma' \frac{C_q}{r^{2(1+q)}},$$

idet q maa bestemmes som Rod i Ligningen

$$\frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+\frac{1}{2})} = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} = \frac{k}{2\gamma(\frac{1}{2})}$$

som i Almindelighed maa løses ved Hjælp af Formlerne (3) og (4), eller (4)' i Forbindelse med Tabellerne over Γ Functionen. En enkelt reel Rod i Ligningen vil dog ofte, ved specielle Værdier af Forholdet k mellem Virkningerne af CD og AB , kunne umiddelbart ses. Saaledes vil

$$k = 2 \text{ give } q = 0 \text{ og } \varphi(r) = \frac{C}{r^2}$$

$$k = 4 \quad \text{''} \quad q = 1 \quad \text{''} \quad \varphi(r) = \frac{C}{r^4}$$

.....

$$k = \pi \quad \text{''} \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{''} \quad \varphi(r) = \frac{C}{r^3}$$

$$k = \frac{3}{2}\pi \quad \text{''} \quad q = \frac{3}{2} \quad \text{''} \quad \varphi(r) = \frac{C}{r^5}$$

.....

Ex. 2. Fig. 6. Punktet M paavirktes ligesom i det fore-gaaende Exempel af Linierne CD og AB ; men Forholdet mellem Virkningerne af CD og AB er fundet at være $= k\xi$.

Loven $\varphi(r)$ for de molecuulære Paavirkninger bliver da at bestemme af

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} dy = -\frac{1}{2}k \int_0^{\xi} \varphi(x) dx$$

som giver

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi^{\frac{1}{2}} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{1}{\xi} \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\xi}}\right) d\xi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}k \int_0^{\xi} \frac{1}{\xi} \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\xi}}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

Sættes

$$\frac{1}{\xi} \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\xi}}\right) = u \text{ og } \frac{k}{2\sqrt{\pi}} = -a,$$

faaes ved Differentiation med Hensyn til ξ

$$\xi \frac{d}{d\xi} \int_0^{(\frac{1}{2})} u d\xi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{(\frac{1}{2})} u d\xi^{\frac{1}{2}} + au = 0 \quad (\delta)$$

som, naar man sætter

$$\int_0^{(\frac{1}{2})} u d\xi^{\frac{1}{2}} = v,$$

bringes paa den simple Form

$$\zeta \frac{dv}{d\zeta} + \frac{1}{2} v + a \frac{d^{\frac{1}{2}} v}{d\zeta^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (e)$$

som er af Formen IV og bestaaer af 2 Grupper af Led, hver med sin constante Værdi for $(n_{i'} - m_{i'})$. Ligningen skulde altsaa kunne fuldstændigt integreres paa samme Maade som III, altsaa ved at sætte

$$v = \zeta^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} \zeta^{i'p}$$

men, naar man forsøger denne Integrationsmethode, vil man støde paa særegne Vanskeligheder, begrundede i Ligningens specielle Værdier for Potensexponenter og Differentiationsindices, saa at det kun vil lykkes at finde particulære Integraler i Ligningen. Omendskjøndt disse Integraler kunde findes paa en noget lettere Maade, vil jeg, for at vise den methodiske Fremgangsmaade ved Integrationen af IV, foretrække først at anvende den. Methodens Anvendelse i dette Tilfælde vil desuden i flere Henseender være meget oplysende, idet den f. Ex. viser, hvorledes en Række af lignende Form som III' kan beregnes ogsaa for $r' = \infty$, og Rækken vendes om, saaledes at A_0 bliver til A_∞ .

Ved Differentiation efter (5) af det ovenstaaende Udtryk for v og ved dets Indsættelse i (e) finder man da

$$\sum_{i'=0}^{i'=\infty} (q + i'p + \frac{1}{2}) A_{i'} \zeta^{i'p} + a \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{\gamma(q + i'p + 1)}{\gamma(q + i'p + \frac{1}{2})} A_{i'} \zeta^{i'p - \frac{1}{2}} = 0$$

Naar man heraf skal kunne finde et fuldstændigt Integral, maa man sætte

$$\frac{\gamma(q + 1)}{\gamma(q + \frac{1}{2})} A_0 = 0, \quad i'p - \frac{1}{2} = (i' - 1)p \quad \text{og}$$

$$(q + (i' - 1)p + \frac{1}{2}) A_{i'-1} + a \frac{\gamma(q + i'p + 1)}{\gamma(q + i'p + \frac{1}{2})} A_{i'} = 0,$$

hvilke 3 Betingelser give

$$q = -\frac{1}{2} - r', \quad \text{idet } r' = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{og}$$

$$\left(\frac{i' - 1}{2} - r'\right) \left(A_{i'-1} + a \frac{\gamma\left(\frac{i'-1}{2} - r'\right)}{\gamma\left(\frac{i'}{2} - r'\right)} A_{i'} \right) = 0 \quad (x)$$

Naar man vil benytte (x) til at udtrykke alle Coefficienterne ved A_0 , da finder man først for $i' = 1$

$$A_1 = -\frac{1}{a} \frac{\gamma\left(\frac{1}{2} - r'\right)}{\gamma(-r')} A_0 = 0$$

hvornæst (x) giver

$$A_{i'} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{i'}{2} - 1 - r' \right) A_{i'-2} \quad (x)'$$

saa at man faaer $A_1 = A_3 = A_5 = \dots = 0$.

Den første (o: $i' = 1$) Betingelse (x), eller

$$(-r') A_0 + a \frac{\gamma(1 - r')}{\gamma\left(\frac{1}{2} - r'\right)} A_1 = 0$$

kan dog, naar A_1 skal være = 0, ikke tilfredsstilles ved nogen anden endelig Værdi af r' end 0, og denne Værdi for r' vil, ifølge (x)', give $A_2 = 0, A_4 = 0, \dots$, saa at $r' = 0$ giver det particulære Integral

$$v = A_0 \zeta^{-\frac{1}{2}}$$

Hvis man vilde udtrykke alle Coefficienterne ved $A_{2r'} = C$, vilde (x) for $i' = 2r'$ give

$$A_{2r'-1} = -a \frac{\gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\gamma(0)} A_{2r'} = 0$$

hvornæst man af (x)' vilde faae

$$A_{2r'-1} = A_{2r'-3} = A_{2r'-5} = \dots = A_1 = 0$$

Man kan derfor sætte $i' = 2(r' - s')$, som, da r' maa være uendelig, giver

$$v = \zeta^{-\frac{1}{2} - r'} \sum_{s'=r'}^{s'=0} A_{2(r'-s')} \zeta^{r'-s'} = \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} A_{2(r'-s')} \zeta^{-s'}$$

Ved i (x)' at sætte $i' = 2(r' - s')$ finder man

$$A_{2(r'-(s'+1))} = \frac{-a^2}{s'+1} A_{2(r'-s')}$$

som giver

$$A_{2(r'-1)} = \frac{-a^2}{1} C, \quad A_{2(r'-2)} = \frac{-a^2}{2} A_{2(r'-1)} = \frac{(-a^2)^2}{[2]} C, \quad \dots$$

$$A_{2(r-s')} = \frac{(-a^2)^{s'}}{[s']} C$$

og altsaa

$$v = \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} C \frac{(-a^2)^{s'}}{[s']} \zeta^{-s'} = C \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} \frac{1}{[s']} \left(-\frac{a^2}{\zeta}\right)^{s'}$$

Til $r'=0$ og $r'=\infty$ svare altsaa henholdsvis 2 particulære Integraler

$$v = C \zeta^{-\frac{1}{2}} \quad \text{og} \quad v = C \zeta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{\zeta}} \quad (t')$$

u skal dernæst, i Overensstemmelse med Reglerne i Art. 2, bestemmes af

$$\int_0^{(\frac{1}{2})} u d\zeta^{\frac{1}{2}} = v, \quad u = \left\{ \frac{d^{\frac{1}{2}} v}{d\zeta^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

saa at man, ifølge (γ), naar en Løsning skal være mulig, maa have $\frac{v}{\zeta^{\frac{1}{2}-1}} = v\zeta^{\frac{1}{2}} = 0$ for $\zeta=0$. Denne Betingelse viser, at det første particulære Integral i (t') ikke kan bruges til Bestemmelsen af u ; det 2det particulære Integral, eller

$$v = C \zeta^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{a^2}{\zeta}}$$

giver derimod, ifølge (β), eller I, II og II a, eller I' og II',

$$u = \pm C a \zeta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{\zeta}}$$

Naar man indsætter Værdierne for u og $\int_0^{(\frac{1}{2})} u d\zeta^{\frac{1}{2}} = v$ i (ϑ), finder man, at u maa tages med det nederste Fortegn; men ved Bestemmelsen af φ bliver Hensynet til Fortegnet uden Betydning, da man, med en forandret Betegnelse for den arbitrære Constant, kan sætte

$$u = \frac{1}{\zeta} \varphi \left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}} \right) = K \zeta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{\zeta}} = K \cdot \zeta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{h^2}{4\pi\zeta}}$$

som giver den søgte Tiltrækningslov

$$\varphi(r) = Kr \cdot e^{-\frac{k^2 r^2}{4\pi}}$$

Da Integrationsmetoden imidlertid ikke i dette Tilfælde har ført til et fuldstændigt Integral for (i), er der en Mulighed for, at der gives andre particulære Integraler end det sidste (i)', som tilfredsstille Betingelsen $v\zeta^1 = 0$ for $\zeta = 0$, og som derfor vilde kunne bruges til Bestemmelsen af u og φ .

Liouville, der har forsøgt Løsningen af Problemet for $k=1$, angiver — uden nærmere at gaa ind paa Fremstillingen af den af ham fulgte Fremgangsmaade — som Resultat et particulært Integral af en Liouvillesk Differentialligning af brudten Orden og af Formen III. Som particulært Integral af denne Ligning er Resultatet rigtigt; men det kan ikke bruges til Bestemmelsen af φ ; thi det viser sig let for $k=1$ at maatte medføre

$$\varphi(r) = r \int_0^\infty \alpha^2 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} - \alpha^2 r^2} d\alpha$$

som med de her brugte Betegnelser giver

$$u = \zeta^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \alpha^2 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} - \frac{\alpha^2}{\zeta}} d\alpha$$

Da dette er en speciel Form af

$$u = \zeta^{-\frac{1}{2}-1} \int_c^b f(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{\zeta}} d\alpha$$

vil man ved Hjælp af (β), eller af Formlen II. b i Art. 2 let kunne undersøge, om et Integral af denne Form for specielle Functionsformer f og specielle Værdier af b og c vil kunne tilfredsstille (β). Man finder da

$$\frac{1}{2} \int_0^{(\frac{1}{2})} u d\zeta^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \zeta^{-\frac{1}{2}} \int_c^b \frac{f(\alpha)}{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{\zeta}} d\alpha \quad \text{og}$$

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} \int_0^{(\frac{1}{2})} u d\zeta^{\frac{1}{2}} = \pm \zeta^{-\frac{3}{2}} \int_c^b a f(a) e^{-\frac{a^2}{\zeta}} da \mp \zeta^{-\frac{1}{2}} \int_c^b \frac{f(a)}{a} e^{-\frac{a^2}{\zeta}} da$$

som, indsatte tilligemed Værdien for u i (9), give

$$\pm \int_c^b a f(a) e^{-\frac{a^2}{\zeta}} da + a \int_c^b f(a) e^{-\frac{a^2}{\zeta}} da = 0$$

der ikke vil kunne tilfredsstilles ved $f(a) = a^2 e^{\frac{a}{\sqrt{\pi}}}$, $c = 0$ og $b = \infty$, men maa fordre $a = \mp a$, som, idet da $f(a) da$ bliver $= K$, giver det allerede fundne particulære Integral, den sidste Formel (10).

Dette particulære Integral vilde man være kommen noget lettere til, hvis man fra Begyndelsen af havde villet give Afkald paa Muligheden af at finde et fuldstændigt Integral; thi man vilde da have kunnet sætte

$$(q + \frac{1}{2}) A_0 = 0, \quad (i' + 1)p = i'p - \frac{1}{2} \quad \text{og}$$

$$(q + (i' + 1)p + \frac{1}{2}) A_{i'+1} + a \frac{\gamma(q + i'p + 1)}{\gamma(q + i'p + \frac{1}{2})} A_{i'} = 0,$$

hvilke 3 Betingelser give

$$q = -\frac{1}{2}, \quad p = -\frac{1}{2} \quad \text{og}$$

$$A_{i'+1} = a \frac{\gamma\left(-\frac{i'}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\gamma\left(-\frac{i'}{2}\right)} A_{i'} = a^2 \frac{\gamma\left(-\frac{i'}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\gamma\left(-\frac{i'}{2} + \frac{1}{2}\right)} A_{i'-1}$$

som viser, at man maa have $A_1 = A_3 = A_5 = \dots = 0$. Sættes derfor $i' = 2s'$, $A_{2s'} = B_{s'}$, faaes, ved i ovenstaaende Ligning at forandre i' til $(i' - 1) = (2s' - 1)$,

$$B_{s'} = a^2 \frac{\gamma(-s')}{\gamma(-s' + 1)} B_{s'-1} = \frac{\gamma(-s')}{\gamma(0)} a^{2s'} B_0 = \frac{B_0}{[s']} (-a^2)^{s'}$$

hvorved Formlen (12) i § 8 er bleven benyttet. Man har altsaa

$$v = \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} B_{s'} \zeta^{-s'} = B_0 \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} \frac{1}{[s']} \left(-\frac{a^2}{\zeta}\right)^{s'}$$

som giver det tidligere fundne particulære Integral (*v*)

$$v = C\zeta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{\zeta}}$$

Art. 6. Integration af den lineære Differentialligning

$$(ax^2 + bx + c) \frac{d^2 y}{dx^2} + (b_1 x + c_1) \frac{dy}{dx} + c_2 y = F(x) \quad \text{VI}$$

Denne Ligning er for $F(x) = 0$ behandlet af Liouville; men hans complementære Function (se Forordet til 1ste Hoved-afsnit) vil her let give og har givet Anledning til Feiltagelser, som i en Anm. i Slutningen af denne Art. ville blive nærmere omtalte.

Naar Ligningen VI differentieres, efter Formlen (8) i § 6, med Index m , faaer man, ved i (8) i Stedet $f_2(x)$ efter Haanden at sætte $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ og y , Ligningen

$$(ax^2 + bx + c) \frac{d^{m+2} y}{dx^{m+2}} + ((2ma + b_1)x + mb + c_1) \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} \\ + (m(m-1)a + mb_1 + c_2) \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m F(x)}{dx^m}$$

Ved at bestemme m saaledes, at Coefficienten til $\frac{d^m y}{dx^m}$ bliver $= 0$, altsaa ved at sætte

$$m = \frac{a - b_1 \pm \sqrt{(a - b_1)^2 - 4ac_2}}{2a} = \left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} \quad \text{VII}$$

eller, naar $a = 0$,

$$m = -\frac{c_2}{b_1}$$

samt

$$\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} = z, \text{ eller } y = \frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}} + \psi(-m-1, x)$$

reduceres Ligningen til

$$(ax^2 + bx + c) \frac{dz}{dx} + ((2ma + b_1)x + mb + c_1)z = \frac{d^m F(x)}{dx^m} \quad \text{VIII}$$

hvori man enten kan tage $m = m_1$, eller $m = m_2$, eller, hvis $a = 0$, $m = -\frac{c_2}{b_1}$, og deraf bestemme z , som derpaa, med den for m anvendte Værdi, giver

$$y = \frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}} + \psi(-m-1, x) = \frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}} + x^m \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \quad \text{IX}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^{-m} z}{dx^{-m}} + x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (m-r') C_{r'} x^{-r'}$$

af hvilke 2 Ligninger det (s. § 3, Punkt 3 og 4) undertiden vil være let, naar y_0 og $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ ikke ere uendelige, at bestemme Constanterne $C_{r'}$ og den i z indgaaede Constant K saaledes, at $x=0$ giver $y=y_0$ og $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$.

I Almindelighed maa dog og kunne altid disse Constanter bestemmes derved, at man indsætter Udtrykkene for y , $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2 y}{dx^2}$, udledede af IX, i VI, hvorved da ikkun 2 af Constanterne kunne forblive arbitrære.

Constanterne ville i Reglen altid blive lettest bestemte, naar Differentiationen $\frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ i IX er foretaget saaledes, at $\frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ er holdt fuldstændigt fri for Led af Complementet, saa at alle Led af denne Form, forekommende i IX, alene ville findes i $x^m \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'}$. Dette vil, som bekjendt, kunne opnaaes ved, at $\frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ beregnes enten efter Formlerne (5), (5)', (9), (10), eller efter ((6)) eller ((7)) med en vis bestemt lavere Grændse a , som, naar man betegner z ved $f(x)$, gjør $\lim \varepsilon f(a + \varepsilon) = 0$, derved at Potensexponenterne i Rækken for $f(a + \varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ ere > -1 . Naar Potensexponenterne i Rækken for z efter Potenser af x ere > -1 , bliver altsaa den lavere Grændse af Integralet i ((6)) og ((7)) $a=0$. Ihvorvel det theoretisk set ikke er

absolut nødvendigt, ville vi derfor i det Følgende gaae ud fra den Forudsætning, at $\frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ i IX er holdt fri for Led af Complementet, som altsaa alene findes i

$$\phi(-m-1, x) = x^m \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'}.$$

Skulde VII gjøre m imaginær, vil der i IX indgaae Functioner af Formen $\gamma(a + b\sqrt{-1})$, hvis numeriske Beregning er angiven i § 1; men meget ofte — som i det følgende Ex. 1 — ville disse Functioner optræde som Factorer til Constanten K , med hvilken de da kunne sammensmeltes, saa at deres Beregning bliver overflødig.

Den anførte Fremgangsmaade ved Integrationen af VI er den almindelige og altid rigtige, som svarer til alle Tilfælde, med Undtagelse af det, i hvilket a og b_1 ere samtidigt = 0. Ofte vil man dog kunne erholde et particulært Integral $y = \frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ ved at forudsætte Complementet $\phi(-m-1, x) = 0$; men Rigtigheden heraf maa altid prøves ved Indsættelse i VI. Paa samme Maade vil, naar m har 2 Værdier m_1 og m_2 , Bestemmelsen af det fuldstændige Integral ofte kunne ske paa en anden (i Virkeligheden dog sjældent simplere) Maade, naar man forudsætter, at $\phi_1(-m_1-1, x) = 0$ og $\phi_2(-m_2-1, x) = 0$ i IX ville give de particulære Integraler $\frac{d^{-m_1-1} z_1}{dx^{-m_1-1}}$ og $\frac{d^{-m_2-1} z_2}{dx^{-m_2-1}}$ og altsaa det fuldstændige Integral

$$y = \frac{d^{-m_1-1} z_1}{dx^{-m_1-1}} + \frac{d^{-m_2-1} z_2}{dx^{-m_2-1}} \quad \text{IX'}$$

idet z_1 og z_2 ere henholdsvis bestemte af VIII for $m = m_1$ og $m = m_2$.

En Sammenstilling af IX med IX' viser imidlertid, at den sidste Formel ikkun da vil kunne give et Integral, naar $\frac{d^{-m_2-1} z_2}{dx^{-m_2-1}}$ er af Formen $\phi_1(-m_1-1, x)$, eller $\frac{d^{-m_1-1} z_1}{dx^{-m_1-1}}$ er af Formen $\phi_2(-m_2-1, x)$. Selv da vil det

være nødvendigt ved Indsættelse i VI at prøve Rigtigheden af IX'. Naar man vil benytte det i alle Tilfælde gjældende i IX fremstillede Integral, er man vel, som foran anført, ogsaa i Almindelighed nødt til at foretage en Indsættelse i VI for at faae Constanterne bestemt; men denne Indsættelse vil altid føre til Maalet, i hvert Fald til et particulært Integral, hvorimod det er muligt, at Indsættelsen i VI af IX' vil vise, at denne sidste Formel ikke giver noget Integral.

Liouville, der som sagt har behandlet VI for $F(x) = 0$, kommer til et fuldstændigt Integral af samme Form som IX', naar man i denne Formel ombytter sin Differentiation med Liouilles; men han bemærker selv om dette Resultat, at det ikke nødvendigvis i alle Tilfælde er rigtigt, men fordrer en Prøve. Naar det senere andetsteds (f. Ex. hos Ramus Pag. 322 og i «Mathematisk Tidsskrift» for 1864, Pag. 15) er fremstillet som absolut gyldigt, da er dette urigtigt. Ogsaa Liouville angiver det altid gyldige Integral ved en Formel af samme Form som IX, naar man i den ombytter sin Differentiation med hans og mit Complement med hans «Complementære Function»; men det vilde være urigtigt at antage, at man ved Liouilles Methode i alle Tilfælde vil erholde et particulært Integral af denne Formel ved i den at udelade den «Complementære Function»; denne maa tværtimod i Almindelighed medtages og søges bestemt ved Indsættelse i VI.

Af Ligninger, som kunne transformeres til VI, anføres dels efter Liouville, dels efter «Mathematisk Tidsskrift» for 1864 Pag. 17:

1) Ligningen

$$c_2 \frac{dy^2}{dx^2} + (c_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + (c + bx + ax^2)y = F(x) \quad \left. \vphantom{\frac{dy^2}{dx^2}} \right\} \text{VI. a}$$

der ved $y = e^{\int (p+qx) dx} \cdot z$

transformeres til en Ligning af samme Form, hvornæst p og q kunne bestemmes saaledes, at Ligningen faaer Formen

$$c^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + (Ax + B) \frac{dz}{dx} + Cz = f(x)$$

2) Ligningen

$$\left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{p}{x^3} + \frac{q}{x^2} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{c_7}{x^4} y = F(x) \left. \vphantom{\left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} \right)} \right\} \text{VI. b}$$

der ved $x = \frac{1}{\xi}$

bringes paa Formen VI

3) Ligningen

$$x^2(ax + b) \frac{d^2 y}{dx^2} + x(px + q) \frac{dy}{dx} + (rx + s)y = F(x) \left. \vphantom{x^2(ax + b)} \right\} \text{VI. c}$$

der ved $y = x^k z$

bringes paa Formen

$$x(ax^2 + bx) \frac{d^2 z}{dx^2} + x(K_1 x + K_2) \frac{dz}{dx} + (K_3 x + K_4)z = x^{-k} F(x),$$

hvornæst k bestemmes saaledes, at K_4 bliver $= 0$, saa at x kan bortdivideres af venste Side af Ligningen, der da bliver af Formen VI

Ex. 1. Ligningen

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + b_1 x \frac{dy}{dx} + c_2 y = 0,$$

som er af Formen V i Art. 5, er som bekendt integreret ved

$$y = k_1 x^{m_1} + k_2 x^{m_2}$$

idet m_1 og m_2 netop have de i VII indeholdte 2 Værdier m_1 og m_2 for Differentiationsindex m . Dette Resultat findes let ved Methoden til Integration af VI.

Først bestemmes nemlig m_1 og m_2 ved VII, og, naar man f. Ex. tager $m = m_1$, bliver da VIII

$$ax \frac{dz_1}{dx} + (2m_1 a + b_1) z_1 = 0$$

Da $m_1 + m_2 = 1 - \frac{b_1}{a}$, kan man indføre $\frac{b_1}{a} = 1 - m_1 - m_2$ i Ligningen, hvorved denne bliver

$$x \frac{dz_1}{dx} + (m_1 - m_2 + 1)z_1 = 0,$$

som giver

$$z_1 = Kx^{-m_1+m_2-1}$$

hvornæst IX med $m = m_1$ giver

$$y = Cx^{m_2} + x^{m_1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'}$$

idet man har sat $K \frac{\gamma(-m_1+m_2)}{\gamma(m_2+1)} = C$.

Ved derpaa at indsætte det fundne Udtryk for y tilligemed de deraf afledede for $\frac{dy}{ax}$ og $\frac{d^2y}{dx^2}$ i den givne Differentialligning finder man let, at C og C_0 kunne forblive arbitrære, men at de andre Coefficienter C_1, C_2, C_3, \dots af Complementet maae være $= 0$, saa at det fuldstændige Integral bliver

$$y = Cx^{m_2} + C_0 x^{m_1}$$

Da $\frac{d^{-m_1-1}z_1}{dx^{-m_1-1}} = Cx^{m_2}$ er af Formen $\psi_2(-m_2-1, x)$, kunde der have været Anledning til at prøve, om ikke $\frac{d^{-m_1-1}z_1}{dx^{-m_1-1}}$ vilde give et particulært Integral, eller om ikke

$$y = \frac{d^{-m_1-1}z_1}{dx^{-m_1-1}} + \frac{d^{-m_2-1}z_2}{dx^{-m_2-1}} = Cx^{m_2} + C'x^{m_1}$$

vilde give et fuldstændigt Integral.

Naar a og b_1 ere samtidigt $= 0$, kan m ikke bestemmes ved VII, og Ligningen VI faaer da, naar man i Stedet for $(x+c)$ sætter x , Formen

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + c_1 \frac{dy}{dx} + c_2 y = F(x) \quad X$$

Differentiation af denne Ligning med Index m giver

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + (m + c_1) \frac{dz}{dx} + c_2 z = \frac{d^m F(x)}{dx^m}$$

idet man har sat

$$\frac{d^m y}{dx^m} = z, \text{ eller } y = \frac{d^{-m} z}{dx^{-m}} + \psi(-m, x).$$

Ved Substitutionen

$$x = \xi^2$$

forandres atter Ligningen til

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + (m + c_1 - \frac{1}{2}) \frac{2}{\xi} \frac{dz}{d\xi} + 4c_2 z = 4 \left(\frac{d^m F(x)}{dx^m} \right)_{x = \xi^2}$$

som gjøres integrabel ved at sætte

$$m = \frac{1}{2} - c_1$$

Indføres nu tillige den forkortede Betegnelse

$$4 \left(\frac{d^m F(x)}{dx^m} \right)_{x = \xi^2} = f(\xi) \quad \text{XI}$$

faaes

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + 4c_2 z = f(\xi)$$

som, ifølge Theorien for de arbitrære Constanters Variation, giver

$$z = K_1 e^{\sqrt{-4c_2}x} \int_{\xi = \sqrt{x}}^{\xi = \sqrt{x}} e^{-\xi \sqrt{-4c_2}} f(\xi) d\xi + K_2 e^{-\sqrt{-4c_2}x} \int_{\xi = \sqrt{x}}^{\xi = \sqrt{x}} e^{\xi \sqrt{-4c_2}} f(\xi) d\xi \quad \text{XII}$$

saa at man faaer

$$y = \frac{d^{c_1 - \frac{1}{2}} z}{dx^{c_1 - \frac{1}{2}}} + x^{-(c_1 + \frac{1}{2})} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \quad \text{XIII}$$

Constanterne $C_{r'}$ saavel som K_1 og K_2 bestemmes dernæst, naar man indsætter de af XIII erholdte Værdier for y , $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2 y}{dx^2}$ i X. I Almindelighed ville Complementets Coefficienter $C_{r'}$ blive = 0; men samtidigen vil da Ligningens særegne Form bevirke, at K_2 bliver afhængig af K_1 , saa at man kun faaer et particulært Integral. Differentia-

tionen $\frac{d^{c_1 - \frac{1}{2}} z}{dx^{c_1 - \frac{1}{2}}}$ forudsættes herved foretagen saaledes, at den ikke medfører Led af Formen $\psi(c_1 - \frac{1}{2}, x)$, som derfor alene ville findes i $x^{-(c_1 + \frac{1}{2})} \Sigma C_{r'} x^{-r'}$.

Naar $F(x)$ er $= 0$, bliver

$$z = K_1 e^{\sqrt{-4c_2}x} + K_2 e^{-\sqrt{-4c_2}x} = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (K_1 + (-1)^{r'} K_2) \frac{2^{r'} (-c_2)^{\frac{r'}{2}}}{[r']} x^{\frac{r'}{2}}$$

altsaa, ifølge XIII,

$$y = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (K_1 + (-1)^{r'} K_2) \frac{2^{r'} (-c_2)^{\frac{r'}{2}}}{[r']} \frac{\gamma\left(1 + \frac{r'}{2}\right)}{\gamma\left(1 + \frac{r'+1}{2} - c_1\right)} x^{\frac{r'+1}{2} - c_1} \\ + x^{-(c_1 + \frac{1}{2})} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'}$$

Naar denne Værdi for y tilligemed de deraf afledede for $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2y}{dx^2}$ indsættes i X, finder man, at $C_{r'}$ maa være $= 0$ og $K_2 = -K_1$. Man har derfor

$$y = \frac{d^{c_1 - \frac{1}{2}} z}{dx^{c_1 - \frac{1}{2}}} = K_1 \frac{d^{c_1 - \frac{1}{2}}}{dx^{c_1 - \frac{1}{2}}} (e^{\sqrt{-4c_2}x} - e^{-\sqrt{-4c_2}x})$$

eller, idet man i Rækken for y kan sætte $r' = 2i' + 1$, multiplicere med $\gamma(2 - c_1)$ og sætte andre constante Factorer udenfor Σ Tegnet, den i Almindelighed stærkt convergerende Række

$$y = Cx^{1-c_1} \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{\gamma(2 - c_1)}{\gamma(i' + 2 - c_1)} \frac{(-c_2 x)^{i'}}{[i']}, \text{ eller} \\ y = Cx^{1-c_1} \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{(-c_2 x)^{i'}}{[i'] \cdot (2 - c_1)(3 - c_1) \dots (i' + 1 - c_1)} \quad \text{XIII'}$$

Naar $c_1 < \frac{1}{2}$, bliver, idet Potensexponenterne i Rækken for z ere > -1 ,

$$y = \frac{d^{c_1 - \frac{1}{2}} z}{dx^{c_1 - \frac{1}{2}}} = K_1 \int_0^{(\frac{1}{2} - c_1)} (e^{\sqrt{-4c_2}x} - e^{-\sqrt{-4c_2}x}) dx^{\frac{1}{2} - c_1}$$

som ved en hvilkenksomhelst af Formlerne (A) til (G) i Art. 4 kan bringes under Formen af et bestemt Integral.

Er $c_1 - \frac{1}{2} = m' + \mu$, bliver, ifølge (7)

$$y = \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} \int_0^{(1-\mu)} z dx^{1-\mu} = K_1 \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} \int_0^{(1-\mu)} (e^{\sqrt{-4c_2x}} - e^{-\sqrt{-4c_2x}}) dx^{1-\mu}$$

hvori ligeledes $\int z dx^{1-\mu}$ ved en af Formlerne (A)–(G) kan bringes under Formen af et bestemt Integral.

Ex. 2. Ligningen

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0 \quad (\lambda)$$

har, ifølge XIII', det particulære Integral

$$y = Cx \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{x^{i'}}{[i'] [i'+1]} \quad (\lambda)'$$

som ogsaa let erholdes af III' for $r' = 0$, idet Ligningen er en speciel Form af III i Art. 5.

For det samme particulære Integral have

$$y = K_1 \int_0^{(\frac{1}{2})} (e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}) dx^{\frac{1}{2}}$$

som ved Formlerne (A)–(G) kan bringes paa Formen af et bestemt Integral. Saaledes vil f. Ex. Formlen (G) for $m = \frac{1}{2}$, $c^2 = 0$ og $\frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = e^{\pm 2\sqrt{x}}$, eller $\varphi(t) = te^{\pm 2t}$ give

$$y = K\sqrt{x} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot e^{2\sqrt{x} \sin \theta} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta e^{-2\sqrt{x} \sin \theta} d\theta \right)$$

eller, naar man i det første Integral sætter $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ og i det 2det Integral $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$,

$$y = K\sqrt{x} \int_0^{\pi} \cos \alpha \cdot e^{2\sqrt{x} \cos \alpha} d\alpha \quad (\lambda)''$$

som altsaa kun er en anden Form for det particulære Integral $(\lambda)'$.

Af det particulære Integral $(\lambda)'$ eller $(\lambda)''$ kan man paa sædvanlig Maade fremstille det fuldstændige Integral; men dette vil ogsaa ved en særegen Fremgangsmaade (s. «Mathematisk Tidsskrift» for 1864, Pag. 30) og ved Afbenyttelse af det particulære Integral $(\lambda)''$ kunne gives en smukkere Form. En stærkt convergerende Række vil dog i Reglen være at foretrække, og en saadan er allerede funden i Art. 5, idet (λ) er en speciel Form af III. b, saa at III'. b for $p' = 1$ og $a = -1$ giver det fuldstændige Integral af (λ) .

Den ved Integrationen af VI anvendte Fremgangsmaade kan — som i § 6 af den foregaaende Afhandling bemærket — altid benyttes til at reducere en lineær Differentialligning, hvori Coefficienten til $\frac{d^{p'} y}{dx^{p'}}$ er en hel Function af x af Graden p' til en lineær Differentialligning af een Orden lavere, hvori Coefficienten til $\frac{d^{p'} z}{dx^{p'}}$ bliver af Graden $(p' + 1)$.

Anm. Ligesom ved Løsningen af VI efter Liouvilles Methode saaledes er det selvfølgelig ogsaa ved Løsningen af X efter den samme Methode i Almindelighed urigtigt at udelade den «Complementære Function». Det i «Mathematisk Tidsskrift» for 1864, Pag. 16 og 17 angivne «fuldstændige» Integral af Ligningen X er saaledes ikke i Almindelighed noget fuldstændigt Integral, hvilket let kan paavises; thi det vilde f. Ex. for Ligningen (λ) give det «fuldstændige» Integral

$$y = C_1 \frac{\delta^{-\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{x}}}{\delta x^{-\frac{1}{2}}} + C_2 \frac{\delta^{-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}}}{\delta x^{-\frac{1}{2}}}$$

hvori δ betyder en Liouvillesk Differentiation; men det «particulære» Integral $y = C_2 \frac{\delta^{-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}}}{\delta x^{-\frac{1}{2}}}$ kan bringes paa Formen af

et bestemt Integral (s. Ramus, Pag. 318, Formel (282)) og bliver da

$$y = C\sqrt{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\sqrt{x}}{\sin \alpha}} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

som ikke er noget particulært Integral i (λ) . Det andet «particulære» Integral $y = C_1 \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} e^{\pm 2\sqrt{x}}}{\partial x^{-\frac{1}{2}}}$ vil vanskeligt kunne beregnes efter Liouilles Grundformel og er sandsynligvis ligesaa lidt noget particulært Integral. Derimod kunde man udvikle $e^{\pm 2\sqrt{x}}$ efter Potenser af x og udføre Differentiationen $\frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial x^{-\frac{1}{2}}}$ efter Kellands Grundformel (s. Forordet til 1ste Hovedafsnit). Denne Formel vil jo vistnok gjøre $\frac{\partial^{-\frac{1}{2}} e^{\pm 2\sqrt{x}}}{\partial x^{-\frac{1}{2}}}$ uendelig, og dette er een af Formlens Mangler; men det uendelige Resultat skyldes dog i dette Tilfælde den for alle Led fælles Factor $\gamma(-1)$, som derfor vil kunne inddrages i C_1 og C_2 . Herved kommer man dog kun til det particulære Integral $(\lambda)'$, idet det ved Indsættelse i (λ) vil vise sig, at C_2 maa være $= -C_1$. Selv ved Anvendelsen af Kellands Formel er altsaa hverken det ene, eller det andet af de «particulære» Integraler noget particulært Integral; men det ene er Complementær Function til det andet. Lignende feilagtige Anvendelser af Liouilles Methode ere gjorte f. Ex. ved Integrationen af VI. c.

Art. 7. Om Beskaffenheden af de Problemer, hvis Løsning kræver en Anvendelse af Differentiation med hvilket som helst Indices. Differentiation med Hensyn til flere Variable.

Jeg har i Forordet til 1ste Hovedafsnit begrundet, hvorfor jeg maa antage, at min Methode i Reglen vil vise sig meget simple i Anvendelserne end Liouilles, og man vil ved en

Sammenligning mellem Liouilles og min Behandling af de foregaaende Exempler vistnok finde Rigtigheden af denne Antagelse bekræftet. Løsningen af alle de af Liouville behandlede Problemer synes mig ved min Methode at være erholdt ikke blot paa en simplere, men ogsaa paa en fuldstændigere Maade end ved Liouilles.

Trods de store Forskjelligheder i Grundlag og Operationsmaade er der ikke destomindre en paafaldende Lighed mellem Liouilles og min Methode med Hensyn til Naturen af de Problemer, ved hvilke der overhovedet kan være Tale om en Anvendelse af dem, og jeg vil derfor i de følgende Bemærkninger angaaende Beskaffenheden af de Problemer, som kræve en Anvendelse af Differentiation med hvilket som helst Indices, kunne for en stor Deel holde mig til, hvad Liouville i denne Henseende har anført.

Medens man maa anvende de sædvanlige Regningsarter, specielt Differentiation og Integration med positive hele Indices, naar man af givne Aarsager vil slutte sig til disses Virkninger, saa tyde de i Art. 2—5 indeholdte Exempler — og da navnlig Tiltrækningsproblemerne i Art. 4 og 5 — alle hen paa, at det omvendte Problem, nemlig det af givne Virkninger at udfinde Aarsagerne, i Almindelighed maa løses ved Differentiation med hvilket som helst Indices. Ofte kan vel dette Problem foreligge under en saa simpel Form, at det kan løses ogsaa uden denne Regningsart; men denne bliver dog altid den rationelle og den simpleste Fremgangsmaade, som directe og indeholdende den fuldstændige Løsning fører til Maalet. Skal dette kunne naaes ad anden Vei, ved de sædvanlige Regningsarter, maa det i Reglen ske ved at gaae ud fra en supponeret Functionsform for Resultatet; men derved udelukkes ikke Muligheden af andre, eller mere fuldstændige Løsninger. Naar man f. Ex. uden at benytte sig af Differentiation med hvilket som helst Indices er, med Hensyn til Virkningen af en Magnetpol paa

en elektrisk Strøm, kommen til det i Art. 4, Ex. 1 fundne Resultat $\varphi(x) = \frac{i}{2x^2}$, saa er det ved at gaae ud fra den Supposition, at $\varphi(x)$ maa være af Formen kx^n . Denne aprioriske Forudsætning har vist sig at være rigtig; men den kunde have været i hvert Fald ufuldstændig. Dette ses endnu bedre af Ex. 3 i Art. 4, naar man lader de to parallelle rette Linier forestille elektriske Strømledere. Constanten k er da ifølge Forsøgene negativ, for hvilket Tilfælde vi have fundet $\varphi(r) = \frac{3i}{2(k+2)} \frac{1}{r^2} + K \frac{1}{r^{-k}}$, hvori K er arbitrær, saa at de givne Data ikke ere tilstrækkelige til en fuldstændig Bestemmelse af $\varphi(r)$. Ved at forudsætte, at $\varphi(r)$ maa have Formen ar^n , er man ad anden Vei kommen til $\varphi(r) = \frac{3i}{2(k+2)} \frac{1}{r^2}$, som ganske vist kan være rigtigt, idet K muligvis ogsaa for $k < 0$ bør være $= 0$, men som maaske ogsaa kun er et ufuldstændigt Resultat. Fuld Sikkerhed i denne Henseende kan kun opnaaes, naar der vides mere, end hvad vi i det nævnte Exempel ere gaaede ud fra som givet.

Ligesom man ved de directe mechaniske Problemer har de givne accelerende Kræfter udtrykte som Differentialcoefficienter af positiv hel (2den) Orden af Coordinaterne, betragtede som Functioner af Tiden, saaledes finder man ved de omvendte mechaniske Problemer de elementære Kræfter, som her ere de søgte Størrelser, næsten altid udtrykte som Functioner, afledede ved Differentiation med brudne Indices med Hensyn til de Variable, af hvilke disse Kræfter afhænge. Differentiation med hvilket som helst (brudne) Indices optræder altsaa her med en Slags Naturnødvendighed.

I Virkeligheden ere de elementære, eller moleculære Kræfter $\varphi(r)$ altid ubekjendte, og deres Virkninger kunne ikke directe iagttages. Det, der kan iagttages, er kun Virkningen af deres Resultant. Det er overalt denne, der danner den bekjendte Function, hvoraf den ubekjendte $\varphi(r)$ maa bestemmes, og dette

kan i Almindelighed kun ske exact ved Anvendelsen af Differentiation med hvilkesomhelst Indices. Vilde man ved Iagttagelser directe tilnærmelsesvis maale de moleculære Kræfters Virkning, maatte man, naar Afstandene ikke ere meget betydelige, betjene sig af meget smaa Legemer; men Virkningen vilde da blive saa svag, at Iagttagelserne bleve upaalidelige. Man maa derfor i Reglen betjene sig af Legemer, af hvilke i det Mindste det ene har en forholdsvis betydelig Masse. Exemplerne i Art. 4 indeholde, omendskjøndt Masserne i Reglen i dem kun ere fremstillede ved een, eller to Dimensioner, i Virkeligheden Elementerne til Løsningen af de fleste Tiltrækningsproblemer, idet man enten vil kunne udvide Exemplerne til at omfatte 2 og 3 Dimensioner for Masserne — saaledes vilde Ex. 5 let kunne udvides til at omhandle Tiltrækningen af en Kugle i Stedet for af en Cirkel —, eller man vil kunne anstille Forsøgene saaledes, at de give de for Løsningen af Exemplerne simplere Problemer fornødne Data. Uden at gaae nærmere ind paa disse rent physiske Spørgsmaal skal jeg med Hensyn til dem indskrænke mig til at henvise til Liouvilles Afhandling «Questions de géométrie et de mécanique» i «Journal de l'école polytechnique», Tome XIII og specielt til Pag. 33—40. Iøvrigt ville sandsynligvis lignende, 2 og 3 Dimensioner af Rummet omfattende, Problemer ofte paa den simpleste og mest directe Maade kunne behandles ved den i Slutningen af denne Artikel omtalte Differentiation med Hensyn til flere Variable.

Foruden de nævnte Exempler i Art. 4 og 5 findes der i de andre Artikler Exempler, som vise en Anvendelse af Differentiation med hvilkesomhelst Indices i næsten alle Grene af den rene Mathematik. Ex. 3 i Art. 2 løser saaledes paa en meget simpel Maade et Problem i Mechaniken. Andre Exempler ere ere rent geometriske, og endeligen er i Art. 5 og 6 Methoden anvendt til Integration af visse totale lineære Differentialligninger saavel af hvilkesomhelst (brudden) Orden som af positiv hel Orden. I Forbindelse hermed kan anføres, at Methoden ofte

vil kunne anvendes til paa en simpel Maade at bestemme de ved Integrationen af partielle Differentialligninger fremkomne arbitrære Functioner, naar disse indgaae i et Integral, som for en vis constant Værdi af en (eller flere) af de Variable erholder en Form, der kan henføres til et af de i Formlerne (A)—(G) forekommende Integraler, medens samtidige Integralet skal være = en given Function af den anden (eller de andre) uafhængig Variable. Mere sammensat, men desuagtet ifølge Art. 5 ofte løseligt, bliver Problemet, naar det, hvad der let kan hænde, giver Anledning til Integrationen af en Differentialligning af hvilkensomhelst (brudten) Orden.

I de i de foregaaende Artikler omhandlede Anvendelser af Methoden forekommer kun Differentiation med Hensyn til een Variabel. At der ogsaa i Anvendelserne vil kunne blive Brug for Differentiation med Hensyn til flere Variable x_1, x_2, x_3, \dots , er dog indlysende. Saaledes ville aabenbart de Problemer, som gaae ud paa Bestemmelsen af Functioner, indgaaende i bestemte Integraler, kunne antage en almindeligere og derfor hyppigere forekommende Form, naar Integralerne ere tagne med Hensyn til flere Variable, end naar de — som ved Formlerne ((6)) og ((7)) og de deraf afledede Formler (A)—(G) i Art. 4 — kun ere enkelte Integraler, tagne med Hensyn til een Variabel.

Under Fremstillingen i I af Methodens Grundprinciper har der ikke været nogen særlig Anledning til at gaae nærmere ind paa Differentiationen med Hensyn til flere Variable; thi den frembyder intet Særegent og udføres ved en ligefrem Anvendelse af Principerne for Differentiation med Hensyn til een Variabel. For Fuldstændigheds Skyld skal jeg dog slutteligen desangaaende tilføje et Par Bemærkninger, for hvis Rigtighed Beviserne ville ligge nær:

Ordenen for Differentiationen med Hensyn til de forskellige Variable er ligegyldig, $\text{v: } \frac{d^{m_1}}{dx_1^{m_1}} \frac{d^{m_2} y}{dx^{m_2}} = \frac{d^{m_2}}{dx^{m_2}} \frac{d^{m_1} y}{dx^{m_1}}$.

Man kan derfor for den «fuldstændige» Differentiation med Hensyn til flere Variable bruge Betegnelsen: $\frac{d^{m_1+m_2+m_3+\dots} y}{dx^{m_1+m_2+m_3+\dots}}$.

Complementære $\phi_1(m_1, x_1)$, $\phi_2(m_2, x_2)$, $\phi_3(m_3, x_3)$, have Formen (B) i § 3; men de arbitrære Coefficienter i $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$, der ere uafhængige af henholdsvis x_1, x_2, x_3, \dots , kunne derimod være arbitrære Functioner af de andre Variable, altsaa henholdsvis af x_2, x_3, \dots , af x_1, x_3, \dots , af x_1, x_2, \dots .

Formlen ((6)) antager for flere Variable Formen

$$\int_{a_1}^{(1, m)} dx_1^{m_1} \int_{a_2}^{(m_2)} dx_2^{m_2} \dots \int_{a_{i'}}^{(m_{i'})} f(x_1, x_2, \dots, x_{i'}) dx_{i'}^{m_{i'}} =$$

$$\frac{1}{\gamma(m_1) \cdot \gamma(m_2) \dots \gamma(m_{i'})} \int_{a_1}^{x_1} dt_1 \int_{a_2}^{x_2} dt_2 \dots \int_{a_{i'}}^{x_{i'}} (x_1 - t_1)^{m_1-1} (x_2 - t_2)^{m_2-1} \dots (x_{i'} - t_{i'})^{m_{i'}-1} f(t_1, t_2, \dots, t_{i'}) dt_{i'}$$

hvor $m_1, m_2, \dots, m_{i'}$ ere > 0 . Ligesom ((6)) vil denne Formel ikke give Led af Formerne $\phi_1(-m_1, x_1)$, $\phi_2(-m_2, x_2)$, $\phi_{i'}(-m_{i'}, x_{i'})$, naar $a_1, a_2, \dots, a_{i'}$ ere $= 0$, og Potens-exponenterne i Rækkeudviklingen for $f(x_1, x_2, \dots, x_{i'})$ efter Potenser af $x_1, x_2, \dots, x_{i'}$ alle ere > -1 , saa at Formlen i dette Tilfælde vil give nøiagtigt samme Resultat som $\frac{d^{-m_1-m_2-\dots-m_{i'}} f}{dx^{-m_1-m_2-\dots-m_{i'}}}$, beregnet efter de andre Formler, f. Ex. efter (5).

Ved Transformationer, analoge med dem, der i Formlerne (A) — (G) af Art. 4 ere foretagne med det enkelte Integral $\int_a^x (x-t)^{m-1} f(t) dt$, kan der af det ovenstaaende Integral dannes mere almindelige Formler, som kunne faae en videre gaende Anvendelse end hine Formler.

Formlen ((7)) kan selvfølgelig gives en lignende Udvidelse som ((6)).

Rettelse. I Stedet for den 10de til 14de Linie f. o. Pag. 14 læses:

«Betegnes nu ved $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$ «den fuldstændige, ved Differentiation med Index m med Hensyn til x , af $f(x)$ afledede Function», og ved $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ «den ufuldstændige, ved Differentiation med Index m med Hensyn til x , af $f(x)$ afledede Function» have»

Denne Rettelse, som foretages, fordi Benævnelsen «Differentialcoefficient» kunde være vildledende, har jeg, paa Grund af den vidt fremskredne Trykning, maattet anbringe paa dette Sted, hvorimod Benævnelsen «afledet Function» er brugt i det efterfølgende franske Résumé.

Bemærkninger over T. Livius' Fremstilling af den
romerske Historie med Henblik paa den antike
Historieskrivning i det Hele.

Af

J. N. Madvig.

(Mødet d. 24de Novbr. 1876.)

Uagtet den filologiske Literatur fra den første Udgave af Niebuhrs Römische Geschichte indtil vor Tid ved Siden af udførlige Ytringer om Livius og Bedømmelser af ham i større Værker frembyder en ganske anselig Række af specielle Afhandlinger om denne Forfatters Fortrin og Mangler, hvorover Fortegnelsen kan findes i Teuffels romerske Literaturhistorie, kan det dog næppe siges, at der nogetsteds er givet en Fremstilling, der paa én Gang yder Livius Billighed og Retfærdighed og paa den anden Side med fuld Fordomsfrihed paaviser, hvad der fattes ham for at være en overalt eller dog i det Store og Væsentlige paalidelig og vore Fordringer tilfredsstillende Historieskriver og Fører i den romerske Stats ældre Begivenheder, Udvikling og Indretninger, medens den tillige med Besindighed sætter Grænse for vilkaarlige Omdannelser og Mistydninger af hans Ord og Beretninger. Og dog er en klar og bestemt Anskuelse af Beskaffenheden af denne Hovedkilde for romersk Oldkyndighed af afgjørende Vigtighed.

Medens Romerne besad en til Republikens Begyndelse tilbagegaaende, om end ikke overalt ganske sikker, Magistratsfortegnelse som Grundlag for chronologiske Bestemmelser, og

korte og tørre Optegnelser om de enkelte historiske Tildragelser, fik de dog først Begyndelsen til en Historieskrivning i sammenhængende og fri Bogform fra den anden puniske Krigs Begyndelse af, en Historieskrivning, der paa én Gang fremstillede de nyeste og samtidige Begivenheder og i indledende Oversigt gik tilbage til den fjerneste Sagtid. Hos intet af de andre italienske Folk, der paa den Tid allerede være bragte under romersk Overherredømme, opstod eller forplantedes en særlig historisk Optegnelse, der kunde tjene til at kontrollere den romerske Beretning. De græske, navnlig sikeliotiske, Skribenter henvendte først Opmærksomheden paa Rom og Italien, da Grækerne begyndte at føle Romernes Overmagt. Den i Førstningen simple og ukunstlede romerske Historiefortælling voxede og fik stedse nyt og rigt Stof under Udviklingen af det romerske Verdensherredømme, hvorfra Tilbageblikket maatte lade det oprindelige ringe Rom fremtræde i en besynderlig Belysning og i vanskeligt forstaaelig Skikkelse, indtil Sullas Tid, paa hvilken den omfattede vidtløftige og ordrige Værker, som f. Ex. Valerius Antias's mere end 75 Bøger; men der fremkom i dette den romerske Prosas Forberedelsesstadium intet Skrift, der som læselig Nationalhistorie kunde tilfredsstillende den følgende Periode, Ciceros og Cæsars, en Dom, som Cicero et Par Gange udtaler, og denne literært dannede Periode, men som adskiltes fra Fortiden ved Forbundskrigen og ved Tilintetgjørelsen af alle de Forudsætninger for den gamle romerske Forfatning, der laa i Folkets og Statens Begrænsning, frembragte selv intet saadant Værk. Først efterat det sidste forvirrede Vrægebillede af en Verden beherskende Republik havde givet Plads for Monarchiet, fattede og udførte Livius Planen til at give sit Folk en til sin Tids Dannelse, Forestillinger og Fordringer svarende Nationalhistorie, paa samme Tid som den græske Rhetor Dionysius fra Halkarnass foretog sig at give Grækerne en bred rhetorisk, pragmatiserende Fremstilling af den romerske Oldhistorie ned til de puniske Kriges Begyndelse.

At Livius løste sin Opgave paa en Maade, der i det Hele tilfredsstillende hans Samtid og den nærmeste Eftertid, i hvilken der endnu levede en nogenlunde fyldig literær Produktion og Dannelse, og gav, hvad der dengang fordredes, derom vidne baade udtrykkelige Udtalelser og Antydninger hos de følgende Forfattere (Asconius, begge Senecaer, Plinius den ældre og Quintilian) og den Omstændighed, at Ingen efter ham gjorde noget lignende Forsøg, medens de, der forsynede den senere fattige Tid med korte Udtog af den republikanske romerske Historie, væsentlig holdt sig til Livius (Florus, Granus Licinianus o. s. v.). Livius's ældre Forgængere dukke efter ham kun frem i enkelte afvigende Notitser med eller uden Navns Nævnelser (hos Tacitus og Plinius den ældre) eller hos de egentlige Antikvarer (Gellius) og fremfor alt Grammatikerne, hos hvem Cato, Claudius Hemina, Cælius Antipater og andre ikke sjælden citeres. Ikke ganske paa samme Maade stiller Sagen sig, naar vi paa Livius lægge vore Fordringers og Ønskers Maalestok. Ville vi imidlertid ikke herved tilsidesætte al Billighed, maa vi for hans Vedkommende med endnu større Styrke gjentage den ovenfor i Anledning af Skribenterne før Sulla gjorde Bemærkning om, hvor vanskeligt det var under Augusts Verdensmonarchi og i hans Tids raffinerede Kulturtilstand at tænke sig tilbage ikke blot i det tidligste Roms ganske smaa Forhold og den begyndende Civilisations elementære Tilstande, men ogsaa i den noget senere Tids endnu stærke Begrænsning og dens dels simple og naive dels ved den voxende Magt og Omfang kunstigt udvidede og omdannede Former.

Hvorledes selv ganske almindelige og nærliggende politiske Indretninger og Forestillinger vare blevne uklare og fordunklede, fordi de efter hele Italiens Optagelse i den romerske Borgerret ikke længere havde Betydning, derpaa finde vi hos to Skribenter, der i Tiden staa Livius ganske nær, Velleius Paterculus og Asconius, et Exempel, der her er saa meget interessantere, fordi det ganske træffer sammen med en Forvirring hos Livius.

Velleius tænker i sin Oversigt over de romerske Kolonialanlæg aldeles ikke paa Forskjellen imellem Borgerkolonier og latinske Kolonier, og Asconius undrer sig over, at Placentia, hvis Anlægelse som Koloni i Aaret 218 f. Chr. han fandt omstændelig berettet, af Cicero kaldes Municipium, idet han glemmer, at Kolonien var latinsk og altsaa ved Opnaaelse af Borgerretten ved Forbundskrigen nødvendig var bleven et Municipium. Hvor grovelig i en senere Tid Gellius forløber sig ved, hvor han vil definere et romersk Municipium, paa dette at overføre en fri Forbundsbyes Indretning, er bekjendt. Men foruden dette Hensyn til Livius's og hans Samtids særlige Stilling ligeoverfor den ældste og ældre Historie maa det derhos ikke glemmes, at hele den antike Historieskrivning havde et mere begrænset Formaal end vor, idet den aldeles overvejende gik ud paa Fremstilling af de personlige og individuelle Handlinger, under hvis Form ogsaa de almindeligere Folkebevægelser søgtes indbragte, medens Udvikling af Civilisationstilstande og af Instituters Bevægelse og Forandring, overhovedet hvad vi kalde Forfatningshistorie, laa de Gamle langt fjernere. Hermed forbandt sig Skildringens og Reflexionens Levendegjørelse igjennem udførlige Taler, der lagdes Personerne i Munden af Forfatteren. Den hele oratoriske Karakter, der naivt fremtræder hos Herodot, befæstedes og udvikledes under Historieskrivningens videre Uddannelse i en Stat, i hvilken politisk og Rets-Veltalenhed spillede en saa stor Rolle som i Athen, og blev gyldig baade for de senere Grækere og for Romerne, en Retning, der (det lader sig ikke nægte) udøvede en hæmmende Indflydelse paa den historiske Betragtningens Alsidighed og Fylde; ikke Lidet af hvad vi medindbefatte under Historiens Omraade, henvistes hos de Gamle til de saakaldte Grammatikers antikvariske Forskning uden derved at vinde i Sammenhæng og Selvstændighed. Heller ikke var hos Oldtidens Historikere Blikket noksom skærpet ved Sammenligning af forskellige Folk og Tider; den almindelige historiske Erfaring var ikke stor nok og alsidig nok til at de med klart Blik kunde

skjælne imellem forskjellige Kulturtrin, imellem primitive Statsdannelser og senere Tiders bevidste politiske Forhandlinger og Bestræbelser, imellem Sagn og sikker historisk Overlevering. Endelig var, tildels ogsaa paa Grund af den før nævnte Sondring imellem Historieskrivning og antikvarisk Forskning, en kritisk Revision af den historiske Fortælling, der først var dannet og efterhaanden udbredt, efter Mindesmærker og tilbagetrængte Kilder i Oldtiden langt vanskeligere og faldt mere udenfor Skribenternes Synskreds end hos os. Monumenternes Beskaffenhed og Opbevaring (ikke dom Dokumenter i samlede Archiver) lagde i Forbindelse med den folkelige Traditions Form store Hindringer i Vejen. En kritisk Revision af hele den romerske Histories efterhaanden antagne Skikkelse fra den ældste Tid indtil August vilde i ethvert Tilfælde have været et for en enkelt Mand aldeles uoverkommeligt Foretagende. Livius vilde give sine Samtidige en til deres Smag og Opfatning passende, veltalende og elegant, Personer og Begivenheder livligt fremhævende Nationalhistorie, væsentlig den Historie, hvis Stof og Indhold allerede var gjældende og optaget i Traditionen, og i hvilken det daværende Roms Storhed overalt spejlede sig, tilbage lige til den fjerneste Fortid, om end hist og her med et let Skjær af kritisk Prøvelse og Udvalg. Den patriotiske Stolthed, som Forfatteren delte med sit Folk, var let tilgængelig for Ensidighed og Partiskhed imod alt Ikkeromersk. Den yderst omfattende Opgave medførte af sig selv (især naar der tages Hensyn til Oldtidens Hjælpe midler og Arbejdsbetingelser ved slige Foretagender) en let og efter vore Forestillinger overfladisk Arbejdsmaade, afhængig af de sig ved hvert Hovedafsnit nærmest tilbydende, anseligste eller dog fyldigste Forgængere, med enkelte Interpolationer og Indskud andetstedsfra, uden Overskuen og fast Beherskelse af Stoffet. Af Forfatningshistorien medtages, foruden den almindelige i Sagnet givne Henførelse af visse Hovedgrupper af Indretninger til nogle af de romerske Konger som typiske Repræsentanter (Romulus, Numa, Tullus Hostilius, Servius Tullius) — hvori alle-

rede mærkelige Forglemmelser og Udeladelser vise sig — kun hvad der ganske umiddelbart i Fortællingen af Begivenhederne og de personlige Handlinger paatrænger sig, og enkelte tilfældige, ofte løsrevne fragmentariske og uklare Brudstykker og Notitser. Hvad der ved Livius's Værks Anlæg og Udførelse imidlertid for os fremtræder som ikke uvigtige Fortrin, er for det Første, at man ikke sjælden bagved den platte og smykkede Overflade ser det fattige Grundlag, det Fordunklede og den tilslørede Usikkerhed i Beretningen naivt dukke frem, og dernæst at man ikke hos Livius har at gøre med kløgtig udtænkte Schematismer, bred Pragmatisering paa opdigtet Grundlag og Indblanding af fremmede Forestillinger, som hos Dionysius fra Halikarnass; endelig giver den latinske Terminologi Forestillingerne og de antikvariske Træk en vis Fasthed og Sikkerhed, som ofte savnes hos Dionys og i andre græske Fremstillinger. Den her antydede Bedømmelse af Livius afviger fra den, der nu kan siges at være almindelig, især deri, at, medens de Fleste vel indrømme, at Livius er ringe som Forsker, men tillægge ham fuld Sandhedskjærlighed og Upartiskhed og fremstille ham som vildledet ved for sildig at have erkjendt visse Føreres Upaalidelighed (f. Ex. Valerius Antias's) eller andres Fortrinlighed (f. Ex. Polybs), nødes vi til at sige, at Livius ikke energisk har villet Sandheden eller bestemt sin Benyttelse af Kilder og Førere herefter, og kunne ikke frikjende ham for ligefrem Partiskhed og Forvanskning eller dog Fordølgelse til Gunst for Romerne paa enkelte Punkter, ligesom vi stærkere fremhæve Skjødesløsheden og Planløsheden ved Fremstillingen af Forfatningsforhold og til Gjengjæld paapege visse, om ikke positive Fortrin, saa dog sammenligningsvis heldige Særegenheder.

Naturligvis gjælder, hvad her er fremsat, kun om Livius's Værk, som det nu ufuldstændigt foreligger, omfattende i de ti første Bøger Historien fra den ældste Tid indtil henved 300 Aar før Christus og dernæst i Bøgerne XXI—XLV den anden puniske Krig og Tiden indtil Macedoniens Erobring. Jo mere Livius

nærmede sig sin egen Tid, desto mere befandt han sig, om end den kritiske Sigtning af Kilderne og deres Indhold ikke blev strengere og grundigere, dog naturligvis paa et Omraade, hvor Tilstande og Indretninger vare mere analoge med hans egen Tids og derved mere forstaaelige og klare for ham. Dog tør det forudsættes, at Tiden før Sulla og før Forbundskrigen, hvad Statsforholdene angik, i flere Punkter har staaet i et mindre klart Lys for Livius end den følgende. Men selv imellem de to Afsnit af Historien, som ere opbevarede, er der en ikke ringe Forskjel med Hensyn baade til Overleveringens egen Sikkerhed og Beskaffenhed og med Hensyn til Stillingen for Livius's Bevidsthed. I det andet Afsnit har Livius for sig et Romerrige, der ikke blot i Tiden, men ogsaa i Magtforhold og Indretninger laa ham nærmere, og en Begivenhederne nærstaaende eller med dem samtidig Hovedfører, Polybius.

Nogle enkelte Træk maa her tjene til at begrunde den almindelige Dom i de forskjellige Retninger.

Hvilken Gyldighed den engang vedtagne og reciperede Beretning har for Livius, udtaler sig i de allerførste Ord af hans Værk: *Jam primum omnium satis constat, Troia capta etc.*, hvori Sagnet om Æneas' Ankomst til Italien og Virksomhed der gives som utvivlsom Historie. I VIII, 18, hvor der handles om Sagnet om to Konsulers Forgiftning Aar 331 f. Chr., fremtræder tillige Omhuen for at give alt det Overleverede fuldstændigt (*sicut proditur tamen res, ne cui auctorum fidem abrogaverim, exponenda est*). Hvor lidet der tænkes paa en kritisk Sigtning og Udvalg af Kilderne eller Afvejning af Beretningens Paalidelighed efter dens Forhold til dem, vise Udtryksom: *habeo auctores, in quibusdam annalibus invenio, in trinis annalibus* (X, 18). Medens Livius oftere omtaler den senere, navnlig Licinius Macers, Benyttelse af et særegent chronologisk Hjælpemiddel (*libri lintei magistratum*), er der med Undtagelse af et Tilfælde, i hvilket Livius ikke kunde undgaa at nævne et af Kejser August fremdraget Oldtidsminde (IV, 20), ikke noget Spor

af at han selv har benyttet nogetsomhelst udenfor de almindelige Annaler liggende Mindesmærke. Han vidste vel, at paa den gamle Kobbertavle, der opbevarede det kort efter Kongernes Fordrivelse med Latinerne sluttede Forbund, stod kun den ene Konsuls, Sp. Cassius', Navn, men om Forbundets Indhold og Beskaffenhed siger han ikke et Ord. Skjøndt Livius har en Følelse af, at han i Kongetiden befinder sig paa et usikkert Sagnomraade, kan han dog ikke modstaa Fristelsen til dramatisk Udmaling i direkt Tale, f. Ex. ved Fortællingen om Servius Tullius's Døtre og deres Mænd i I, 46, 47. Det republikanske Rom fremtræder strax med den Overlegenhed, som Sagnet havde helliget; hvad andre Kilder berettede om den ydmygende Fred med Porsenna eller om Latinernes Ligestillethed med Romerne i de fælles Krige (Festus v. prætor ad portam), deraf findes intet Spor hos Livius, ligesom da heller ikke hos Dionysius fra Halikarnass. Derimod viser sig meget tydeligt i flere Kapitler af anden Bog, hvor korte og tarvelige Beretningerne i det Enkelte vare om den ældste Tid (se II, 16, der ene indbefatter 5 Aar, II, 19 init.). Saa kommer vel den fyldige Udmaling i Enkeltheder af Slaget ved lacus Regillus (II, 19, 20); men hvilken Paalidelighed denne Fylde har, viser sig, naar vi kort efter (II, 21 § 3) læse: hoc demum anno (2 Aar senere) ad Regillum lacum pugnatum apud quosdam invenio, og dertil føjes den almindelige Bemærkning: Tanti errores implicant temporum, aliter apud alios ordinatis magistratibus, ut nec qui consules secundum quos, nec quid quoque anno actum sit, in tanta vetustate non rerum modo, sed etiam auctorum digerere possis. Men for denne ligefremme Udtalelse, hvorfor Dionysius vel vilde have vogtet sig, skylde vi Livius Tak. Den fyldige, livlige og dramatiske Udvikling af Krige, Slag og Optrin i Byerne, som mødte os i Beretningen om de første Konsulpar og ved Regillerslaget, voxer nu efterhaanden jævnt og giver Nabostridigheder og Strejftog imellem smaa Byer i faa Miles Afstand Charakteren af store Begivenheder, udførte med mægtige

Legioner. Hvorfra skrev sig nu denne Fylde, som er meget forskjellig fra enkelte specielle Træk og Anekdoter, knyttede til vigtige Hovedbegivenheder? Uden Tvivl fornemmelig, skjønt ikke alene, fra en enkelt Skribents kjække Fantasi, hvem Livius valgte til Hovedfører i hele det Parti af Historien, der laa forud for græsk (Polybs) og Samtidiges (Fabius' og Catos) Kontrol, og som den paafølgende Tid ingenlunde lagde til Side.

Livius nævner i det Hele ò Gange Fabius Pictor som antiquissimus auctor med en vis Agtelse, men mest blot saaledes, at han bemærker hans Afgang fra den Fremstilling, som Livius selv følger (se f. Ex. II, 40, VIII, 30: si credere libet Fabio, X, 37); kun i Talangivelsen ved Slaget ved Trasumenersøen, XXII, 7, altsaa i en langt senere Tid, følger han ham. Derimod nævner han Valerius fra Antium 19 Gange, vistnok ofte med Tvivl eller endog stærk Dadel over hans Taloverdrivelser (f. Ex. III, 5: audet tamen Antias Valerius concipere summas etc.); men han bortkaster ikke engang simpelthen disse Overdrivelser, hvor han har Catos egen, langt beskednere Angivelse om hans egen Bedrift (XXXIV, 15), og paa andre Steder gjengiver han uden at nævne Valerius og uden mindste Betegning af Tvivl aldeles tilsvarende Overdrivelser, som naar han i Samniterkrigens sidste Afsnit (Aar 293 f. Chr.) i Bog X, 38 og 42 fortæller, at Samniterne drog i Marken med 38,000 Mand, men derpaa, efter at 8000 af disse ere sendte bort (c. 40) lader af Resten 20,340 nedsable*) og 3,870 fange, det er 24,000 af 30,000. Det er klart, at Valerius Antias stadig har ligget for Livius, og at hans Overførelse af den senere Tids Storhed paa de ældre, mindre Forhold for en stor Del er gaaet over i Livius's ligesom i Dionysius's og i det Hele den til os komne Fremstilling. Livius havde Valget imellem at give sine Læsere en langt kortere og tørrere Fremstilling af Kilderne før Antias

*) Det bør dog bemærkes, at nogle af de bedre Haandskrifter kun have 10,340.

eller at lægge dennes og andre beslægtede Skribenters ikke solide Fylde, som i en lang Aarrække havde havt Plads i den romerske Læseverden, til Grund for den skjønnede og elegante Fortælling, han bød sine Læsere, og han valgte det Sidste. Men ved Siden af denne sin brede Fremstilling stikker det simplere og fattigere eller af et andet Indhold udfyldte Grundlag højst karakteristisk frem. Efterat vi i syvende Bog 39—42 have faaet en vidtløftig og rørende Skildring af en lidet motiveret Opstand og lidet motiveret Forsoning med højst ubetydelige Følger i Aaret 342 f. Chr., læse vi pludselig i c. 42 § 3 ff. en Angivelse om, at hele denne Beretning «i andre Annaler» lød ganske anderledes, saa at man, som Livius selv siger, ikke véd andet, end at der har været en Opstand, og at den er bleven bilagt. Men foran denne sidste Angivelse indskydes i Begyndelsen af c. 42 en meget kort, men højst mærkelig Angivelse af, at i andre Kilder berettes om højst vigtige politiske Forhandlinger og Beslutninger, der havde fundet Sted i dette Aar: Præter hæc invenio apud quosdam, L. Genucium tribunum plebis tulisse ad plebem, ne fenerare liceret; item aliis plebiscitis cautum, ne quis eundem magistratum intra decem annos caperet, nec duos magistratus uno anno gereret, utique liceret consules ambos plebeios creari. Hertil føjer Livius da selv: quæ si omnia concessa sunt plebi, apparet, haud parvas vires defectionem habuisse, og med denne Betingelsessætning lader han alle Spørgsmaal om væsentlige Forfatningsstridigheder og deres Afgjørelse falde. Efterat vi VIII, 37 § 3 have læst om en Krig med Apulerne, hedder det § 4, at Andre fortælle, at Krigen ikke blev ført imod Apulerne, men til Forsvar for Apulernes Forbundne mod Samniterne. I X, 3, 4 og 5 læses en temmelig vidtløftig Beretning om en i Aaret 290 af Diktatoren M. Valerius Maximus i Etrurien ført Krig, der ender med en Triumf, men derpaa tilføjes i § 13: habeo auctores sine ullo memorabili prælio pacatam ab dictatore Etruriam esse. I X, 37 ved Aar 294 staar først en Beretning om Konsulen Lucius Postumius Megillus's Kampe

i Etrurien, og der angives, at paa et Sted faldt 2800 Mand af Fjenderne, paa et andet nedsabledes 2000 og 2000 gjordes til Fanger — Valerius Antias nævnes ikke —; men i § 13 hedder det til Slutning: *et huius anni parum constans memoria est. Postumium auctor est Claudius in Apulia fusum fugatumque etc.*

I det andet opbevarede Afsnit af Livius, der begynder med den 2den puniske Krig, er Hovedkilden som bekjendt Polyb; men i hans Beretning om de store Krigsbegivenheder indskydes af latinske Kilder ved hvert Aar Notitser om Skuespil og Lege, Præsters Dødsfald og Valg og deslige urbana, vel ogsaa en og anden vigtigere politisk Forhandling. Der viser sig nu ogsaa her ikke faa Mærker af hurtigt Arbejde, f. Ex. i Forvexling af Navne og Personer, uklar Omtale af den samme Begivenhed paa forskjellige Steder (XLIII, 16 og XLIV, 16) eller ligefrem Gjentagelse og Henførelse til forskjellig Tid (XXIV, 48, XXVII, 4 og XXVIII, 17 om Kong Syphax' Forbindelse med Romerne), i Beretninger, hvis Modsigelse ikke bemærkes, XXXVIII, 53 og XXXIX, 52 om Scipio den ældres Død, i senere Indskud af Træk, der i Hovedberetningen aldeles ikke ere antydede, (XXVI, 21 ved Marcellus's Triumf om en vis Sosis, der skal have spillet en Rolle ved Indtagelsen af Syrakus) i Misforstaaelse af Gjenstanden for diplomatiske Forhandlinger, tildels ved urigtig Opfattelse af Polybs Ord (XXXIII, 13, § 7, 8 og 11, og XXXIII, 30, hvor et indskudt *quoque* frembringer hele Forvirringen), og fremfor alt i chronologiske Forvirringer og Urigtigheder, der ere opstaaede af Uopmærksomhed paa Forholdet imellem Magistratsaaret og det naturlige Aar og paa Polybs særegne Fordeling af Begivenhederne efter Sommer og Vinter, saasom strax i Begyndelsen af 21de Bog, hvor Hannibal i samme Aar drager fra Sagunt til Alperne, og dog et Vinterkvarter lægges imellem, hvorover Livius selv udtrykker sin Forundring, ved Begivenhederne i Spanien i Aarene 209, 208 og 207 og ved Hensættelsen af olympiske Lege til Aaret 207 istedetfor 208. Men ved disse

Fejl i Enkeltheder (selv ved Forglemmelsen af et helt Aars Tildragelser i Spanien) gjør sig en ovenfor antydet Undskyldning stærkt gjældende; Livius, som de Gamle overhovedet, understøttedes ikke af en fast og overalt gjældende Aarsregning og Datering; han havde ikke Landkort, chronologiske Tabeller, et haandterlige Bøger, hvis Efterslagning var let, ikke Registre eller deslige Hjælpemidler, ingen øvet Oversætterfærdighed. Men Polybius er undertiden vilkaarligen skudt til Side for at gjøre Plads for mindre paalidelige Beretninger, som Livius antog at hans Læsere nu engang forlangte. Thi heri og ingenlunde, som man nylig har antaget, i en ikke fra Begyndelsen af tilstedeværende Indsigt i Polybs Fortrin, ligger Grunden til, at Livius f. Ex. giver den fabelagtige Fortælling om Hannibals Overgang over Alperne med Sprængningen af Bjergskrænter ved Ild og Edike (XXI, 37); Romerne maatte ikke hos Livius savne de Træk, der hørte til dirus Hannibal, og derfor maatte det af Polyb forbigaaede Sagn om en Bro, dannet af Menneskelig, i det Ringeste indskydes i en Tale (XXIII, 5 § 12); derfor maa enhver god og mild Handling af Hannibal nedsættes. Herved erindres vi da om Beviserne paa den ovenfor nævnte nationale Ensidighed og Partiskhed paa andre Punkter, baade i de ti første Bøger og i de senere 25. Den fremtræder allerede i første Bog c. 50 naivt ved Fremstillingen af Tullus Herdonius, der skjønt han kun klager over Tarquinius Superbus's Hensynsløshed og derfor efter en usand Beskyldning straffes paa den forfærdeligste Maade, dog, fordi han optræder mod Romerkongen, maa skildres som et uroligt Hoved (*seditiosus facinorosusque homo*). Den viser sig i Beretningen om Krigene mod Samniterne, der bestandig overvundne bede om Fred, men kun faa induciæ, og saa dog idelig beskyldes for Fredsbrud, og ganske særdeles i hele Beretningen om Overenskomsten ved Caudium og dens Brud. I den puniske Krig er Forræderi for Rom tilladt, imod Rom en Forbrydelse (XXIII, 7 og 8 om Decius Magius og Calavius; hvad der hos Saguntinerne (XXI), der kæmpe mod

Hannibal, er straalende Heroisme, er hos Beboerne af den spanske By Astapa, der forsvarer sig mod Romerne, barbarisk Vildhed (XXVIII, 22). Uagtet Perseus af Macedonien virkelig ønsker Fred med Romerne, men skuffes af dem (XLII, 43), er Skylden for Krigen dog paa hans Side. Særdeles naivt eller plumpt fremtræder denne Livius's Partiskhed i Beretningen om Kong Attalus i XLV, 20; han beder personlig i Rom om til Løn for sine ydede Tjenester at faa de macedoniske Byer Ænus og Maronea; Resultatet angives med Ordene: omnibus honoribus muneribusque et præsens est cultus et proficiscentem persecuti sunt. Men hvad blev der gjort ved Ænus og Maronea? Det læste Livius hos Polyb, men vilde ikke gjengive det; Romerne lovede Attalus dem, men beholdt dem selv. Ganske af samme Art er Fortællingen i XLV, 34, hvor det siges, at Attalus holdtes borte fra en Konference med Gallogrækerne, over hvis Krænkelser han beklagede sig, men Livius tillige udtrykker sin Forundring over, at de romerske Udsendinges Forestillinger til hans Gunst gjorde saa lidet Indtryk paa Gallogrækerne. Polyb, hvis Beretning Livius i det øvrige gjengiver, siger, at Romerne hemmelig ophidsede Gallogrækerne til at chikanere Attalus.

Livius holder af hist og her at give sin Fortælling et vist ærværdigt Præg ved Optegnelsen af gamle Formularer (*carmina*) i den ældre Sprogform, f. Ex. folkeretlige Erstatningsfordringer (*res repetendæ*), for Krigserklæring ved Fetialerne, for Provocation, for Devotion (VIII, 9); til den sidste føjer han (VIII, 11) et Slags Hjertesuk over Nutidens fornemme Foragt for det gamle og hjemlige (*prisca et patria*). Men hvor de virkelige Instituter omhandles, viser sig overalt Lethed, Flygtighed og Tilfældighed i hvad der anføres eller forbigaaes. I første Bog nævnes de tre *centuriæ equitum*, Rannes, Tities og Luceres, men først i X, 6 træffe vi tilfældigen i en Tale paa hele Romerfolkets Inddeling i 3 ribus med disse Navne. I I, 43 nævnes

Oprettelsen af 4 tribus urbanæ under Servius Tullius; men de tilsvarende talrigere og vigtigere tribus rusticæ glemmes aldeles; Livius bliver derved fri for alle Skrupler over Forholdet imellem det oprindelige Antal af tribus (30) og det, hvormed han i anden Bog begynder (20). I Fortællingen om Appius Claudius's Censur (IX, 29 og 30), har han ikke et Ord om nogen Foranstaltning med Hensyn til libertini eller Forandring i Borgernes Fordeling i tribus, men i c. 46 læse vi, at forensis factio havde faaet Kræfter ved Appius Censur, qui senatum primus libertinorum filiis lectis inquinaverat, et — — urbanis humilibus per omnes tribus divisio forum et campum corrupit. Hvor et Stykke tilfældig tages med af en gammel Kilde, som Skildringen af den ældste Hærinddeling og Opstilling (VIII, 8 i Anledning af Slaget mod Latinerne ved Veseris) hersker i det Enkelte en Forvirring og Uklarhed, hvorpaa man forgjæves søger at raade Bod ved lige halsbrækkende Rettelser og Forklaringer. I XXVI, 4 finde vi en Beretning om Indførelsen af en Art let Fodfolk, velites, under Belejringen af Capua; men velites ere hos Livius selv nævnte mange Gange før. Enkelte Gange giver Livius, hvad han fandt i sin Kilde, som et enkelt historisk Faktum, uden at antyde, at der betegnes en varig Forandring eller Indretning, som naar det i XXVII, 36, 14 hedder: primis quattuor legionibus populus tribunos creavit, in ceteras consules miserunt, en Notits, om hvis Forhold til en anden i XLIII, 12, 6 det er vanskeligt at dømme. Uheldigst er det, at ved enkelte meget vigtige Forhandlinger og Foranstaltninger det væsentlige Punkt, hvorpaa Betydningen beror, udelades, saa at det Hele viser sig i et falsk Lys. To bekendte Exempler herpaa, til hvilke der knytte sig store, endnu ikke for Alle fjernede Misforstaaelser i den nyere Tid og meget vidtløftige Stridigheder, ere Udeladelsen ved den liciniske Agerlov af Ordet publicus, d. e. af Lovens udelukkende Hensyn til Domæneland i privat Haand IV, 35 etc.), ved Beretningen om en stor latinsk Krigs Afslut-

ning og andre Nabofolks Undertvingelse (VIII, 14 og 21, 9) Forglemmelsen af, at den Borgerret, der søges given de Under-
 tvungne, er *civitas sine suffragio*, en haard Undertrykkelses-
 tilstand, en Forglemmelse, der fremkalder Livius's egen For-
 undring over Miskjendelsen af Romernes Ædelmod; Forglem-
 melsen træder aldeles aabenlyst frem ved Arpinaterne, der
 i X, 1 faa romersk Borgerret uden Betegnelse af den sær-
 lige Art, men om hvilke det først XXXVIII, 36 over hundrede
 Aar senere berettes, at de da fik Stemmeret. Baade i sig
 selv vigtig og særdeles oplysende er af denne Art den Mis-
 forstaaelse, der finder Sted i Beretningen om nogle Koloniers
 Svigten af deres Pligt mod Romerfolket i den anden puniske
 Krig. I XXVII, 9 siges, at Romerfolket dengang havde 30
 Kolonier (*triginta coloniæ populi Romani tum erant*), og i 10
 betegnes i Konsulernes Tale Indbyggerne i disse Kolonier lige-
 frem som Romani, men at der alene er Tale om latinske Ko-
 lonier, fremgaar ikke blot af hvad vi vide om en Mængde
 Borgerkolonier, der ikke høre til disse 30, men af hele For-
 tællingens Indledning, hvori der alene antydes, at Latinernes
 og de Forbundnes Udholdenhed begyndte at vakle, og siges med
 rene Ord af Livius selv i XXIX, 15, hvor Beretningen om disse
 Kolonier afsluttes (jfr. den ovenfor berørte Uklarhed i samme
 Gjenstand hos Vellejus og Asconius). I Modsætning til saadanne
 Udeladelser staar hist og her Indblanding af Træk, der tilhøre
 senere Indretninger, i ældre Tid, f. Ex. af Kohorteinddelingen i
 de tidligere Legioner. Noget enestaaende er i V, 12 Livius's
 Betragtning over den ene Plebejer, der fik Plads ved Siden af
 fire patriciske Konsulartribuner, medens de af Livius anførte
 Navne aldeles tydeligt give fem Plebejer ved Siden af en enkelt
 Patricer. Men ved Siden af alle disse, tildels meget betydelige
 Anker maa det atter til Slutning fremhæves, at der ikke hos
 Livius findes en eneste kløgtig udtænkt Konstruktion af en
 Oldtidsindretning, saadan som f. Ex. Dionysius's af Curiernes

Sammensætning i Analogi med de attiske Phratriers, eller en saadan Romerstaten aldeles fremmed Forestilling, som de af Dionysius fra Grækenland hentede Isopoliter, der have givet Niebuhr og Andre Anledning til Opførelse af hele Luftkasteller. Livius er flygtig, men han har aldeles intet opdigtet; han har ikke sjelden givet Brudstykker og Halvheder, der maa udfyldes og forklares; men det, der staar (om Indretninger og Instituter), er Brudstykker af det Rigtige.

Fortsatte Bidrag
til en rigtig Opfattelse af Øiestillingen hos Flyndrene.

Meddelte i d. K. D. V. Selskabs Møder d. 26de Febr. og 22de Dec. 1875.

Hertil Tavle I, II, III og IV.

Af

Japetus Steenstrup.

I.

I det K. D. Videnskabernes Selskabs Oversigter for November 1863, S. 145—94, meddelte jeg en Afhandling:

«Bidrag til en rigtigere Opfattelse af Skjævheden hos Flyndrene (*Pleuromectides*) og til Forklaring af begge Øines Fremkomst paa samme Side».

Begge Forhold oplyste jeg der tillige ved Hjælp af flere Træsnit i Texten og ved en Kobbertavle, som fremstillede tre Stadier i Øiestillingens Fremkomst hos nogle unge, vandklare Flyndre fra det aabne Hav. Da hos disse Flyndre begge Øinene regulært fik deres Plads paa Hovedets venstre Side, kunde de kun henføres til Hvarrernes Familie (*Rhombi*) eller til Hvarretungernes (*Plagusia*), men ifølge flere Bygningsforhold mente jeg dog snarest at burde henføre dem til de sidstnævnte, idetmindste indtil videre, og jeg nævnte dem derfor «*plagusia*» agtige.

Begge Øinenes Fremkomst paa én og samme Side af Hovedet forklarede jeg at have sin Grund deri, at der var foregaaet en eiendommelig Flytning med det øvre Øie; thi dette Øie, der oprindelig tilhørte Flyndrens Blindside, var, efter min Mening, i den tidlige Ungdom trykket fra denne Side over til

Øiesiden opad og tvers igjennem nogle af Hovedets fastere Dele. Denne eiendommelige Vandring af Øiet fremhævede jeg endogsaa paa Titelbladet af de Særtryk, som bleve tagne af denne Afhandling*).

I min Fremstilling havde jeg nemlig meget stærkt betegnet ét Punkt, der syntes mig indtil da altfor lidet paaagtet. Af de to Øine, som enhver Flynder bærer paa sin farvede Side, er det øverste, der aldeles sikkert hos alle Flyndre, af hvilken Gruppe de end ere, hører oprindelig til den modsatte Side, i en saadan Stilling til sine Omgivelser og navnlig til Knoklerne i Pandebenssystemet, at det ikke kan tænkes at være kommen paa sin Plads paa nogen af de Maader, paa hvilke man hidtil havde tænkt sig Øiestillingen tilveiebragt. Hverken nemlig derved, at hele Hovedet var bleven dreiet om imod den ene Side (Øiesiden), ikke heller derved, at kun et bestemt Belte af Hovedet, Øieregionen, var bleven dreiet enten over imod Øiesiden eller helt om paa denne. Øiets Stilling til Omgivelserne syntes mig derimod paa en aldeles umiskjendelig Maade at antyde, at der foruden hin, mere eller mindre stærke Omdreining til den ene Side af et vist Parti af Hovedet, maatte nødvendigvis være sket en Omflytning af visse Dele i dette Parti, og under denne Omflytning maatte Blindsidens Øie siges at have banet sig Vei igjennem visse fastere Dele af Hovedet, for i en mer eller mindre skraa Retning tilsidst at naa den bestemte Plads imellem Omgivelserne, som det indtager paa den farvede Side af Hovedet hos alle Former af Flyndre, de maa henhøre til hvilken som helst Gruppe, de ville. Netop derved, at det just er Øieæblet med dets Tilbehør, der dreies, for-

*) «Om Skjævheden hos Flyndrene og navnlig om Vandringen af det øvre Øie fra Blindsiden til Øiesiden tvers igjennem Hovedet» m. m. Bidrag til rigtigere Opfattelse af Flyndrenes Bygning af J. Japetus Sm. Steenstrup. Kbhvn. 1864. Med 1 Kobbertavle og mange Træsnit. 52 Sider, samt med Dedication til nu afdøde Skibsfører Vilh. J. V. Hygom, Dbmd. og R. Dbg.

skydes og flyttes — hvilken Bevægelse, man bedst kan tænke sig under Form af en stedse tiltagende Skelen i Retningen opad og tilsidst indad, saaat Øieæblet kommer til at udøve et fortsat Tryk imod Omgivelsen dog nærmest imod den stærke hindeagtige Mellemvæg mellem de to Øiegruber — netop derved bliver det da let forstaaeligt, at det Usymmetriske i Flynderhovedets Bygning er stærkest udpræget i Øieregionen. Det Afsnit af Kraniet, der ligger foran Øinene, er i Reglen langt mindre usymmetrisk, og det bagved disse liggende Parti, den egentlige Hjernekasse, er, som bekjendt, kun mere umærkeligt bleven forstyrret i sin Symmetri.

At en Bevægelse af Øiet, som den, der paa en saa utvetydig Maade laa udtalt i den osteologiske Bygning af Hovedet hos enhver udvoxen Flynder, virkeligen ogsaa fandt Sted i Fiskens yngste Alder, om ikke lige tidligt hos de forskellige Grupper af Flyndre, var jeg saa heldig samtidig at kunne oplyse i den nævnte Afhandling ved Hjælp af hine smaa, vandklare, i det aabne Hav fangne «plagusia»agtige Flyndre. Disse endnu næsten symmetriske Flynderformer frembøde mig nemlig forskellige Trin i denne Gjennemgang igjennem Hovedet, idet Blindsidens Øie i forskjellig Grad var trængt frem i den Tunnel, som Øiet ligesom banede sig opad og over imod den modsatte Side af Hovedet, eller hvoraf det endog, for det ene Exemplars Vedkommende, var ifærd med at gaa ud paa Hovedets Øieside, som dennes øvre Øie. Til Understøttelse for den hævdede Anskuelse kunde jeg endeligen i samme Afhandling dels fra Literaturen dels fra egne Iagttagelser anføre ikke faa Exempler paa Standsningsdannelser, der alle noksom bekræftede, at for at forstaa den endelige Uddannelse af en hvilken-somhelst Flynderform, maatte man holde tre Faktorer i dennes Tilbliven vel ude fra hinanden, nemlig: den mere almindelige Skjævhed eller Asymmetri i hele Fiskens Bygning, Omdreiningen af visse Partier af Hovedet og Omflytningen i disse (S. 150—51).

I det fulde Tiaar, der er hengaaet siden, har Flyndrenes stærke Mangel paa Symmetri og den dermed i Forbindelse staaende besynderlige Øiestilling været Gjenstand for Undersøgelser og Fremstillinger fra flere Sider. Vi have i dette Tidsrum modtaget mere eller mindre udførlige Fremstillinger fra Professor (nu Sir) Wyville Thomson, dengang ved Universitetet i Belfast, senere ved det i Edingburg og i de tre næstsidsste Aar den videnskabelige Chef for den store engelske Expedition med Skibet *Challenger**), fra Dr. H. R. Traquair, nu Lektor i Anatomi i Edingburg**), fra Professor J. C. Schiødte, Inspector ved vort Universitets zoologiske Museum***), fra Dr. A. W. Malm, Intendant ved Gøteborgs zoologiske Museum****), fra Dr. v. Klein, Generalstabslæge i Würtemberg †), og nu allersidst fra Professor i sammenlignende Anatomi, Dr. C. B. Reichert i Berlin, Direktør for Universitetets store anatomiske Museum dér ††).

*) Notes on Prof. Steenstrups Views on the obliquity of Flounders. By Prof. Wyville Thomson, F. R. S., M. I. A. etc. [Annals and Magazine of Natural History for May 1865, pag. 361—71, w. a plate (XVIII)]. Paa Tavlen er optagen Copier af de 6 Figurer, der fremstillede de 3 plagusiaagtige Smaaflyndre fra begge Siderne, de to Figurer af Helleflyndrene *Hippoglossus maximus* og *Hippogl. pingvis* samt Figuren af Pighvarrens (*Rhombus maximus*) Cranium.

**) On the Asymmetry of the Pleuronectidæ, as elucidated by an Examination of the Skeleton in the Turbot, Halibut and Plaice. By Ramsay H. Traquair, M. Dr., Demonstrator af Anatomy in the University of Edinburgh. [Transactions of the Linnean Society, vol. XXV, 1866, pag. 263—296, w. 4 plates (29—32)].

***) Øiestillingens Udvikling hos Flynderfiskene. Ved J. C. Schiødte [Naturhistorisk Tidsskrift, 3 Række, 5 Bind, S. 267—275 med en Tavle (XI)]. 1867.

****) Bidrag till Kännedom af Pleuronektoidernes Utveckling och Byggnad. Af A. W. Malm. 28 S. med 2 Taflor. 1868. 4. (Kgl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bandet 7. Nr. 4).

†) Der Kopf der Pleuronectæ von Dr. F. Klein, m. 1 Taf. (Würtembergersche naturwissenschaftliche Jahreshfte; 24 Jahrg. 3 Heft. Stuttgart 1868, S. 271—308).

††) C. B. Reichert: Über den asymmetrischen Bau des Kopfes der Pleuronectiden, m. 2. Taf. (V u. VI) (Archiv f. Anatomie, Physiologie, u. s. w. von Reichert und Du Bois-Reymond. 1874. S. 196—216).

Da denne Sidstes i 1874 udkomne Afhandling i vel høi Grad mistyder Forholdene i Flynderhovedets Bygning og viser en sjælden Overseen af væsenlige Punkter, som hans Forgjængere tilstrækkeligen have klaret, giver den mig saameget større Grund til nu ikke længere at tilbageholde mine Bemærkninger om disse forskjellige Behandlinger af et Æmne, der baade i anatomisk og physiologisk Henseende har saa stor Interesse, og som endogsaa har faaet en forøget Interesse derved, at en ny Skoles Tilhængere ikke have undladt at benytte det som et godt Bevis for den ringe Vanskelighed, Naturen har ved at omdanne én Dyreform til en ganske anden*).

De ovennævnte 6 Forfatteres Afhandlinger kunne igrunder næsten alle siges at være fremkaldte ved min forrige Meddelelse til Selskabet i 1863, da alene Dr. H. R. Traqvair's danner en Undtagelse derfra, og det dog kun tildels. I haandskreven Tilstand var hans Afhandling nemlig omtrent et Aar tidligere bleven forelagt Fakultetet i Edingburg som Doktoratsskrift, men som saadant kun opbevaret i Fakultetets Archiv. I dens senere nu foreliggende trykte Form (1866) tager den væsenlig Hensyn til den af mig fremsatte og hævdede Tydning, og dette ser man iøvrigt at Forfatteren allerede 1—2 Aar tidligere end hans Afhandlings Offenliggjørelse temmelig udførlig har gjort i en Meddelelse, som han forelagde The Royal Physical Society of Edinburg d. 25 Januar 1865**).

*) Man sé f. Ex. Giovanni Canestrini, Professore nella R. Università di Modena: Intorno alla Teoria della Transformatione delle Specie ed all'origine dell'Uomo [Estr. dall'Annuario Filosofico del Libero Pensiero del 1867]. Milano 1867, p. 30/31 med Copier i Træsnit af mine 3 «Plagusia»-Figurer.

***) Sé Proceedings of The Royal Physical Society of Edinburg, Session 1864—65. Observations on the development of the Pleuronectidæ. By Ramsay H. Traqvair, M. Dr. pag. 215—222. En Meddelelse, hvori han bl. a. om min *plagusia*agtige Flyndreyngel ytrer sig noget udførligere, end i sin senere større Afhandling.

II.

Min Fremstilling af de Veie, som Blindsidens Øie følger forat naa sin Plads som øvre Øie paa den farvede Side af Fisken, har ikke fundet fuld Tilslutning hos nogen af disse Forfattere, men nærmest dog hos den første, Prof., Dr. Wyville Thomson. Denne ansete Zoolog, der af et Uddrag, som var meddelt i *Annales des Sciences naturelles* 1864, kjendte min Fremstilling af de osteologiske Forhold i Flynderhovedet, og som i 1864 under sin Nærværelse her havde taget mit Materiale af de smaa «*plagusia*»-agtige Flyndre i meget nøie Øiesyn, gav i *Annals of Natural History* for May 1865 et udførligere Uddrag af de forskjellige Afsnit af min Afhandling og derefter tilføiede han sammesteds sine egne Bemærkninger om det Resultat, hvortil mine Undersøgelser havde ført mig. I disse Bemærkninger indrømmer han Rigtigheden af min Paastand, at de ældre Forklaringsmaader, der alene ved Dreining enten af Hovedet eller af Øiet fra den ene Side af Hovedet over paa den anden, vilde gjøre Rede for det Phænomen, Flyndrene viste os, vare utilstrækkelige til at gjøre dette; ligeledes indrømmer han Rigtigheden af den Kjendsgjerning, som de unge *plagusia*-agtige Flyndre havde givet mig, at Blindsidens Øie virkelig baner sig Vei fra én Side af Hovedet ud paa den anden*). Men Prof. Wyv. Thomson er imidlertid ikke ret tilbøielig til at indrømme, at denne Vandring sker just «*through the head itself*», hvormed han egenlig vil sige: skraat op igjennem Øiehulens Loft eller Pandetaget, saaledes

*) . . . «In the paper of which the above is an abstract the distinguished author has clearly made out his principal and most interesting point — that a simple torsion of the anterior portion of the head of a Flounder on its axis is insufficient to explain the final position of the eyes», 3688, og i umiddelbar Fortsættelse dermed: «and his direct observations on the «*Plagusia*» prove that the eye of the blind side actually passes from its own side of the head to the other side — at all events, under the integument and under the subcutaneous tissues which contain the rudiments of the dermal bones forming the support of the anterior border of the dorsal fin, if not actually through the head itself».

som flere Figurer af Kranier af udvoxne Flyndre i min forrige Afhandling søgte at anskueliggjøre denne Opfattelse og som disse nu igjen skulle bringe det i Læserens Erindring (Tavle II).

I disse Figurer (7—10) betegnes Pandebenene (*frontalia*) paa høire og venstre Side ved f og f' , Forpandebenene (*front. anteriora*) ligeledes ved a og a' , Bagpandebenene (*front. posteriora*) ved p og p' , og Pladsen for høire og venstre Øie ved o og o' , medens et \div betegner Pladsen, hvorfra Blindsidens Øie er vegen. Af de uparrede Knogler betegnes Plovskjærbenet (*vomer*) med v , Sibenet (*ethmoideum*) ved e , og Nakkebenets øvre Pladestykke (*crista occipitalis*) ved c . Paa begge Sider af dette ligge Issebenene (*parietalia*). Den samme Betydning have disse Bogstaver paa det til Sammenligning fremstillede Cranium af en symmetrisk Benfisk (Torsken) Fig. 6.

Figurerne antyde følgelig, at Blindsidens Øie, hvilket hos de almindelige Flyndre er det venstre (Figurerens $o' \div$), hos Hvarreflyndrene derimod det høire (disses $o \div$), men hos alle det øvre, er tænkt at have i sin Tid bevæget sig hen under en Del af sin Sides Pandeben og Forpandeben, hvis udvendige Rande det lader blive staaende tilbage som en Benbro*), der vedbliver at forbinde Kraniets forreste Bén (Ethmoideum, Præfrontale og Vomer) med Hjernebassen, medens det under denne Bevægelse trykker den indre Side af Pandebenet med sig over paa Øiesiden, eller ved sit Tryk

*) Netop saaledes udtrykte jeg mig i min første Afhandling i 1863, S. 157 (15), som man navnlig vil sé af de nedenfor frembævede Ord: «Øiet med dets Tilbehør er flyttet ud af dets normale Omgivelser, det viser Knokkelbygningen tydeligen; men den viser ligesaa tydeligt tillige, at Øiet har søgt, som Regel ellers er, at tage disse med; den største Del af dem har dog gjort Modstand og ere blevne paa deres Plads. Derved er den mest paafaldende Uregelmæssighed i Flynderhovederne opstaaet. Men derved er tillige opnaaet, at Flynderen for sin nye Bevægelsesmaade paa Blindsiden har kunnet faa en fast Benbro fra Snuden til Baghovedet og Rygsøilen, svarende til dens nye Ligevægtsplan og af største Betydning for baade dens Svømning og Nedboring i Sandet og Dyndet».

bringer den mere eller mindre til at forsvinde. Hos vore Hvarrer (Pighvarren, *Rhombus maximus*; Slethvarren, *Rh. barbatus*) ligesom hos Helleflynderen (*Hippoglossus*) findes der saaledes i hele Længden af Mellembalken imellem de to Øine noget af Blindsidens Pandeben, navnlig den Del deraf, hvortil nedad i Øiehulen den stærke hindede Mellemvæg imellem Øiegruberne er fæstet med sin øvre Rand, medens sammes nedre Rand hæfter sig til Kilebenets Sidekam. Hos de nævnte Hvarrer udgjør imidlertid denne Del kun en meget tynd Benflis eller Splint, *f*, der lægger sig op imod et tilsvarende Parti af Øiesidens fuldstændigere Pandeben, *f'*, Fig. 8; men hos en almindelig Flynder (som Rødspætten, *Platessa vulgaris*; Skrubben, *Plat. flesus*) Fig. 7 er det kun paa en ringe Del af Mellembalkens Længde, at en saadan Splint af Blindsidens Pandeben *f'* findes øvre paa Øiesidens, *f*. Hos Argushvarrerne vil der ikke engang (sé Fig. 9 og 10 paa Tavle II) findes Spor af en saadan Splint, og denne Slægt af Hvarrer (Bleekers *Rhomboidichthys*) har altsaa et øvre Øie, der, uagtet det oprindeligt sad paa Hovedets høire Side og under denne Sides Pandebén, bogstaveligen ligger imellem de to Siders Pandebénspartier, saaledes, at der i Mellembalken imellem de to Øine ikke er nogetsomhelst Spor af den ene Sides Pandebénspartier (den høires), men denne er dannet alene af den andens (den venstres, *f'*—*a'* Fig. 9).

Førend jeg gaar videre, finder jeg det hensigtsmæssigt at erindre om, at Udtrykket «Vandring», som jeg ogsaa i forrige Afhandling brugte om Øiets Bevægelse i Forhold til dets omgivende Dele, tages nærmest i Ordets virkelige Betydning*), og ikke i nogen metaforisk, dog naturligvis i den Forstand, at dets Omflytning i Forhold til Nabo- og Gjenbopartierne ikke var Resultat

*) Jeg kan derfor ikke fuldt ud vedkjende mig Wyv. Thomsons Ord i det nævnte Uddrag: «The term «migration» of the eye is, of course, used in a some what metaphorical sense. The eye changes little in actual position. With the growth of the fish the associated parts are, as it were, developed past it, producing this singular obliquity.»

tatet af dets egne Bevægelser alene, men lige saa meget af alle de tilstødende Deles, saaledes som vi sædvanligen i den organiske Natur iagttage slige Processer udførte. For at imødegaa en anden Misforstaaelse, vil det maaske heller ikke være af Vejen her at tilføie, at Udtrykkene «skele» og «skele sig igjennem» heller ikke brugtes som ganske metaforiske. En Flynderunge vilde visselig aldrig blive til en rigtig og retskaffens Flynder, hvis den undlod at «skele» og «skele itide».

I Opfattelsen af de nævnte osteologiske Bygningsforholds Tilblivelse hos Flyndrene, er det nu, at Prof. Wyv. Thomson afviger fra mig for saavidt, som han vilde være mere tilbøielig til at antage, at Blindsidens Øie, som jo er det øvre Øie paa Øiesiden, og som der hos alle Flyndre ligger omgivet af en sluttet Øienring (orbita), medens det nedre Øie ikke besidder en saadan, ikke var bleven omsluttet af denne eiendommelige Orbita paa den Maade, jeg havde antydnet, nemlig ved Skelen, Tryk og en derved fremkaldt Resorption fra neden af, men ved en, efter hans Mening, meget simplere Fremgangsmaade. Medens jeg lader Resorptionen ske nedefra og altsaa ved Gjennembrud af det oprindelige Bentag eller, hvis Benet ikke er dannet, Hindetag over Øiet, mener Wyv. Thomson, at Øiet ved Tryk og Resorption udvendig fra eller fra Siden af har skaaret sig en Vei ind igjennem det Tag, som Pandebenen og Forpandebenen oprindeligt havde dannet over Øiet, og at det Gab eller Udsnit i disse Ben, som var opstaaet ved, at Øiet banede sig denne Vei, senere var bleven lukket igjen med ny Benmasse. Den stærke Benbro, der som bekjendt (se Figurerne 7—10, T. II) danner Orbitas øvre Væg og just gjør Orbita til en sluttet Øienring, skulde altsaa tildels, ja for en stor Del, være dannet ved en saadan Udfyldning eller Eftervæxt, medens den for mig er den tilbagestaaende Rest af den ydre Rand af Pandebenspartiet. Denne Prof., Sir Wyville Thomsons Hypothese støtter sig altsaa i det Hele til en lignende Vandring af Øiet, som den, jeg

har fremstillet, idet ogsaa han i det indbyrdes Forhold mellem Hovedets Ben og Øiets Stilling til disse sér udtalt en Nødvendighed for, at Øiet i sin Tid maa have gjennebrudt Bentaget eller, hvis det er sket i en meget tidlig Tid, da den Membran, der siden blev til Pandebenet.

Den her nævnte Afvigelse i vore Opfattelser kan maaske synes Mangen at være ikke synderlig stor. Alligevel maa jeg dog paa vore Kundskabers nærværende Standpunkt indvende meget imod min edingburgske Collegas Anskuelse og fastholde disse Indvendinger i det mindste saalænge, indtil denne engang maatte kunne støtte sig til nogetsomhelst faktisk, hvilket jo for Øieblikket ikke er Tilfældet. Det vil snart vise sig, at Forskjellen er af en større Betydning, end det ved første Øiekast syntes.

For det Første indvender jeg altsaa, at der i hin stærke Benbro, som hos alle Flyndre danner den ene Halvdel af den sluttede Øiehule ($a-f$ Fig. 8—10, $a'-f'$ Fig. 7), og som for mig er den tilbagestaaende ydre Rand af det oprindelige Pandeparti, aldrig er bleven iagttaget Spor af det Gab for Øiets Gjennemgang, hvis tidligere Tilværelse Sir Wyville Thomson forudsætter. Ikke engang hos saadanne smaa Flyndre, hvis Øine for kort Tid siden maa have naaet deres Plads, har man sét nogen Rest af et slikt Gjennembrud.

Dernæst har man heller ikke i Pandebenet eller i Forpandebenet paavist Spor af, at nogen Gjenvæxt af Knokkelmassen havde fundet Sted, og dog maatte man antage, at Tillukningen af det forudsatte Gab vilde forblive saa meget mere kjendelig, som Erfaringen viser os, at det eiendommeligt traadet-straalede Benvæv i Fiskenes Cranium er saare vel skikket til at røbe enhver Forstyrrelse, der har truffet Vævet. Et slikt Gjennembrud maatte saa meget snarere antages at have efterladt et kjendeligt Ben-Ar, som Kanalen, hvorigjennem Øiet forudsættes gaaet, ikke vel kunde undgaa at skjære sig baade gjennem Forpandebenet

og Pandebenet, eftersom disse to Knokler hos Fiskene skyde sig over hinanden i saa stor en Udstrækning*).

Hertil kommer for det Tredie den Besynderlighed, at de Misdannelser, vi kalde Standsningsdannelser, ikke sjælden træffes hos Flyndrene, og at vi navnlig ingenlunde sjælden se saadanne udtrykte i Øiets Stilling, Hovedets Form og Rygfinnens Forhold til begge disse, saaledes som det er os velbekjendt og om hvilket jeg ved talrige Exempler har mindet i min tidligere Afhandling og atter nu minder, idet jeg paa Tavle III indsætter et Par af de da anvendte Figurer (Fig. 12 og 13). Desuagtet er der dog, mig vitterligt, til Dato ikke bleven paavist nogen Form af saadanne Standsningsdannelser i Udviklingen, der kunde antyde, at Fisken i sin tidligere Alder havde haft den forudsatte Afbrydelse af sin Benbro eller en slig Svækkelse i denne. Naar man betænker, hvilken Betydning den nylig omtalte Forbindelse imellem Hjerne-kassen og Hovedets Forende har for Flynderens samtlige Bevægelser, og ikke mindst for dens Nedskydning i Havbundens Sand eller Lér, og denne Betydning har Prof. Thomson fuldstændig anerkjendt, saa er det saa meget ufatteliger, at den unge Flynder under sine vanlige Bevægelser ikke jevnthen skulde forskyde Forholdene i Hovedet, dersom virkelig i Fiskens unge Alder Øiets Gjennemgang havde fremkaldt en saadan Afbrydelse i Forbindelsen af Hovedets Knogler.

Alt det Anførte udgjør imidlertid tilsammen taget kun den første Gruppe af mine Indvendinger imod den Opfattelse, som Prof. Wyv. Thomson har fremsat. Da han, saavidt jeg har forstaaet ham, egenlig kun har fremsat denne i den Mening, herved at gjøre Øiets Vandring eller Flytning igjennem Hovedets Væv dels lettere forstaaelig for os, dels ligesom lempeligere for Fisken, maa jeg altsaa nu vende mig til den anden og ligesaa

*) I dette Punkt er Prof. Wyv. Thomson af en anden Mening og antager ikke, at Forpandebenet vilde berøres af dette Gjennembrud, men de virkelige Forhold mellem disse to Ben begunstige ikke denne Opfattelse.

væsenlige Gruppe af mine Indvendinger, den, der bestrider Simpeltigheden og Letfatteligheden af den Proces, der ligger i min skotske Collegas Hypothese.

Det er nu næsten fra alle Sider in confesso, at Øiet virkelig flytter sig, o: forandrer sin Stilling væsenlig i Forhold til dets Omgivelser, og efter de Flestes Mening vedbliver Øiet under denne sin Vandring at have Forfladen (sin huddækte Cornea) i Hovedets Overflade. Det maa altsaa under Bevægelsen trykke foran sig alt, hvad der er paa dets Vei, eller aldeles bortskaffe dette og det i det mindste til en Dybde, der er lig Øieæblets Tykkelse, og i en Bredde mindst lig Øieæblets Længdediameter. Arbeidet, der udfordres til Flytningens Udførelse, maa blive desto større, jo mere forskelligartede de Væv ere, der skulle gjenembrydes eller opløses, og jo større Modstandsevne, de frembyde, samt jo længere den Strækning er, der skal gjennevandres. Disse Forhold ere neppe blevne rigtigten vurderede af den Hypotheses Tilhængere, som efter tilsyneladende Fænomener antage, at Øiet i selve Hovedets Overflade først skulde gaa op ad den ene Side (Blindsiden), saa over Ryglinien ned paa den anden Side, og som i en enkelt af Hypothesens Afskygninger lader Øiet, efter at være kommen forbi Rygfinnen, atter gaa langs med denne tilbage en god Strækning.

Prof. Sir Wyy. Thomson, med hvem jeg paa dette Sted nærmest har at gjøre, er i al Fald enig med mig deri, at Øiet gaar en meget kort Vei; jeg mener: den korteste Vei, Sir Wyville: den næstkorteste, idet han under alle Omstændigheder lader Øiet vandre under Huden og hos mine af ham her i Museet undersøgte vandklare Flyndre endog under den forreste Del af Rygfinnen, ja maaske igjennem dens Rodparti (sé hans ovenanførte Ord. S. 179, Anm.).

Saaledes som jeg i Overensstemmelse med de virkelige Forhold mellem Hovedets Ben fremstiller Øiets Vandring, bestaar denne jo væsenligt i følgende: under sit eget Bentag, eller, hvis Forbeningen ikke har fundet Sted, under sit Hinde- og

Brusktag vælter blot Blindsidens Øie sig om sin horizontale Axe indad imod Mellemvæggen og skyder sig opad imod Orbitaloftet, hvor det da ved Tryk og Resorption skyder den indre Side af sit Pandeparti med de tilhæftede Dele mere og mere over paa Øiesiden, medens den ydre Side af dette Pandeparti bliver staaende tilbage; ved de samme simple Midler fortsætter Øiet sin Vej skraat op igjennem dette Tag, indtil det kommer frem, alt efter Graden af Pandebenets Resorption, enten helt paa den indre Side af sit Pandeben (Fig. 9—10) eller dog indenfor dettes ydre Rand (Fig. 7—8). Dette er dog vel — saa synes det mig — en ulige simplere Fremgangsmaade, end efter den af min ærede Kollega givne Anvisning at lade Øiet hæve sig og først gennembyrde Taget fra Pandebenets Yderrand af og derefter lade en successiv Opbyggelse af det Nedbrudte finde Sted. Alene for det egentlige Pandebens Vedkommende maatte denne Fremgangsmaade fordre det dobbelte Arbeide, og ikke blot et dobbelt, men tillige et mere kombineret Arbeide. Thi dette maatte det jo blive, selv om der ikke tages Hensyn til den yderligere Gjenopbyggelse af resorberede Dele, der vilde være en nødvendig Følge af, at Øiet paa sin Vei havde bortskubbet eller bortædt en god Del af Grundlaget for det forreste Parti af Rygfinnen, og selv om man vilde indrømme det neppe Indrømmelige, at Forpandebenet (*front. anterior*) blev aldeles uberørt af Vandringen (sé foran S. 184, Anm.).

Efter Prof. Wyv. Thomsons egne Ord ville jo, idetmindste hos saadanne Flynderunger som dem, jeg havde afbildet under Navnet «Plagusia» og for hvilke en ny Repræsentant findes her fremstillet fra begge Sider i Tab. I, Fig. 1—5, selve Finnestraalernes Støtter blive stærkt angrebne af det ovenover Pandebenet sig fremtrængende Øie. Dersom nu Øiet virkeligen underminerede Rygfinnen paa den Maade, som Wyv. Thomson lader formøde, maatte man unægtelig undre sig over, at ikke de fleste Flyndre bleve saadanne Monstrositeter, som de ovenfor

omtalte eller som Yarrels «malformed Brill» (fremstillet igjen Tab. III, Fig. 13) og deslige.

Endelig maa jeg endnu imod Rigtigheden af Wyville Thomsons Opfattelse af Mellembalken imellem de to Flyndre-Øine, som om denne modsvarede aldeles den af Pandebenene hos andre regelmæssige Fisk dannede Mellembalk mellem Øinene, nedlægge en bestemt Indsigelse*). Selv om vore to store Hvarrer (*Rhombus maximus* og *Rh. barbatus*), hvilke Forfatterne som en captatio benevolentiae for deres egen Opfattelse næsten stadigen afbilde som Exempler, er dette Udsagn jo ikke ganske rigtigt, thi selv her er jo den ene Sides Pandeben ikke fuldstændig tilstede i Mellembalken, men kun i en fortrykt og tynd Tilstand; endnu mindre rigtigt er det for Helleflynderens Vedkommende, fra hvilken man ogsaa nu og da gaar ud. Hos de yderst talrige almindelige Flyndre (Rødspætten, *Platessa vulgaris*;

*) Allerede Wyv. Thomson er mindre klar i dette Punkt; uagtet han udtrykkelig, som rigtigt er, lader den Del af Pandebenet forsvinde ved Tryk og Resorption, som er udsat for Øiets Fremtrængen, lader han dog i sit brugte Exempel af Pighvarren den tilbageblevne, halvmaaneformede Splint indtage samme Forhold til Øiet, som oprindeligt, hvilket ikke er rigtigt. Saaledes S. 370:

«When the change in the position of the eye occurred, this exposed portion of the right frontal, whether potential or actually developed, was pushed or absorbed before the migrating eye and its nervous and muscular connections, and reduced to the crescentic plate, which in the mature head, lines the left wall of the orbit, still retaining its original position with reference to the eye.»

Men naar den ærede Forfatter saa nogle Linier senere (p. 371), efter at have ladet det høire Forpandebén ved en hel Nydannelse stoppe det store Gab, Øiets Gjennemvandring havde frembragt i Pandebenet, tilføjer: «the eye having maintained its normal relation to its associated bone (the right frontal) throughout», da er det aldeles urigtigt. Øiet var jo ogsaa i «normal relation» til den store Del af det høire Pandebén, som det bragte til at forsvinde; og nu behage Læseren, med de af mig i disse to Citater udhævede Ord for Øie, at sammenligne Pighvarrens Kranium (gjengivet her Tab. II, Fig. 8) med Kraniet af en anden Hvarre, Argushvarren (Tab. II, Fig. 9), og man vil sé, at her ikke er Stump tilbage af hele høire Pandebén paa indre Side af Øiet.

Skrubben, *Pl. fesus*; Sletten, *Pl. limanda*; Mareflynderen, *Pl. saxicola*) finder man derimod kun en meget svag Flig af det ene Pandeben tilstede i Mellembalken, og denne naar endda kun $\frac{1}{4}$ af Mellembalkens Længde. Hos saadanne Flyndre som Argushvarrerne (*Rh. longimanus*, *Rh. argus* m. fl.) findes der, som sagt, ikke engang en saadan Flig af Blindsidens Pandeben. Er det da ikke ligeud en urimelig Tale, naar Zoologer ville fordre Medhold deri, at den ene Sides Pandeben hos saadanne Flyndre osteologisk modsvare begge Siders Pandeben hos andre Fisk, eller deri, at det til den modsatte Side vandrede Øie endnu her ligger i det rette Forhold og Stilling til sin Sides Pandeben, skjönt dette Pandeben ikke engang i et Rudiment er tilstede hverken ovenover eller paa Indsiden af Øiet? altsaa endnu i rette Stilling til sit ikke eksisterende Pandebensparti!*)

Men Feiltagelsen i denne Vurdering af Øiebalken er ikke tilende hermed. Den har uheldigvis andre i Følge med sig, og paa disse tør jeg ikke undlade strax at gjøre opmærksom.

Naar andre Fiskes Mellembalk imellem Øinene — hedder det f. Ex. saaledes hos en af disse Zoologer — zootomisk mod-

*) Til Sammenligning med de ovennævnte Ord af Prof. W. Thomson forudskikker jeg her følgende af Dr. Traquair (de udhævede Ord ere ligeledes udhævede af mig): — — «The eye in question preserves its morphological relations to the frontal bones and the neighbouring structures quite intact» — l. c. p. 287; og endnu mere l. c. p. 269: «That this is the true morphological middle line, and that the interocular bar is the only and complete homologue of the frontal arch in the Cod, is proved simply by the fact that between the interocular bar and the basi-presphenoid bone there extends a fibrous membrane, having imbedded in it the olfactory nerves as they proceed to the nasal fossæ in front.» Saaledes er jo ogsaa min og Andres Opfattelse af denne «fibrous membrane» som Mellemvæg mellem Øinene og som hørende til Mellembalken, men denne Opfattelse kan da umulig berettige til Udtrykkene «only» og «complete», dem det her kommer an paa; og foruden andre lignende Udtryk smlgn. samme Forfatters l. c. p. 270: «But what, then, is the pseudomesial bar or bridge in the Turbot's cranium, if the interocular bar be the complete representative of the frontal arch in the cod? This we shall see presently.»

svares aldeles fuldstændigt af Mellembalken imellem Flynderøinene, saa kan hin Benbro, der ligger udenom det øvre Øie, selvfølgelig ikke høre med til de normale Fiskes Mellembalk, eller være en af de Dele, der danne denne hos de sædvanlige Fisk; den maa altsaa være noget helt andet. Denne Forvexling af *pars pro toto* fremkalder derfor disse nye Udlægninger af dette Parti, som senere Afhandlinger have givet os og som jeg ret snart skal kortelig omtale. Ligeledes er den besynderlige Misforstaaelse af Flynderfiskenes virkelige Midtplan, som man saa hyppig møder, i Grunden kun en Affødning af Feilvurderingen af Mellembalken hos Flynderne. Man mener nemlig at Flynderfiskens Midtplan gaar igjennem dens Mellembalk mellem Øinene, og paa Grund af en aldeles partiel Forskydning over til Øiesiden af et kun lille og begrændset Parti af Hovedets Midtplan tager man altsaa en simpel, slet og ret Deviation af Øieregionens Midtplan som en Flytning af det hele Hoveds eller den hele Fisks Midtplan! Dersom Læserne strax ville mærke sig disse Uklarheder i Opfattelserne, eller saafremt nogen af dem maatte selv slutte sig til dem, da disse Uoverensstemmelser i Opfattelserne af væsenlige Forhold i Flynderhovedet, ville de vistnok finde Studiet af mange Punkter i Afhandlingerne om Flynderne meget lettet*).

*) Dr. Malm's Udtalelse S. 10 om Flyndernes almindelige Bygning er i sin Sammenhæng denne: »På grund af det föregående torde min l. c. sid. 173» (hans tidligere Meddelelse om Flynderne i K. Sv. Vetensk. Akademiens Öfversigter f. 1854, S. 173—183; jvfr. min tidligere Afhandling i Översigt f. 1863, S. 169 og S. 177, Anm.) »uttalade sats, eller att »de flundreartede fiskarnas kroppsbyggnad är mera skenbart än verkligt osymmetrisk» ej befinnas vara origtig; ty pleuronektoiderna hafva under hela sitt lif sina ögon på ömse sidor om kroppens längdaxel, som förlöper emellan pannbenens mediana partier. Man kan väl säga, att en pleuronektoid har en ögonsida och en blindsida, då fråga endast är om den sida, som fisken har i förra fallet upp- och i sednare nedåtvänd; men anatomisk taladt har hvarje af mig undersökt pleuronektoid ingendera af sidorna om kroppsaxeln blind, utan, såsom andre vertebrater, ett högra och ett venstra öga». — Saavidt kan man, naturligtvis med Undtagelse af hans her og overalt gjentagne Bizarreri om Flyndernes

III.

Min Indsigelse mod disse sidste Punkter giver mig en naturlig Overgang til Dr. Traqvairs udførlige og i mange Henseender omhyggelige Arbeide over Flyndrenes Hoved; thi ikke alene har han den nævnte Opfattelse af Mellembalken mellem Flynderøinene, at den skal modsvare den hele Mellembalk hos andre Fisk eller Hvirvel-Dyr i Almindelighed, men han erkjender heller ikke de Dele af Pandebenet og Forpandebenet, der danne Længdebroen langs Blindsiden, som normale Bestanddele af disse to Knokler, men som særegne Udvæxter, der hos andre Fisk ikke have noget tilsvarende. Disse Udvæxter fra Pandebog Forpandebenet — han kalder dem med Fælledsnavnet «external angular processes» og den Benbro, som de danne udenom Øiet, «pseudomesial bar» — skulle altsaa skyde sig frem om Øiet og med Enderne lægge sig over hinanden, efter at Øiet under sin Vandring allerede har trykket sit Pandebensparti over paa Øiesiden og tillige mere eller mindre undertrykt det eller bortædt det, alt efter vedkommende Flynders Slægt og Art. Det Knokkelparti i Flyndernes Kranium, der af alle Anatomicer hidtil, med Meckel og Cuvier i Spidsen, og som jeg

Symmetri, saa nogenlunde samstemme med ham. Men nu begynder Dissonantsen: — «Ögonen sitta riktigt, just därför, att de vända sina öfre kanter emot hvarandra och emot hvardera sitt ofvanför framåtskjutande mediana parti af frontalia propria, emellan hvilke den verkliga rygglinien fortlöper. Det öfversta ögats nedre kant är därför ej vänd uppåt **emot fiskens** anatomiska rygglinia, utan nedåt ifrån denna, såsom vanligt hos andra fiskar; men Steenstrup har ansett den hos många pleuronektoider äfven med ryggfena försedda kanten fram forbi ögonen för den verkliga rygglinien, hvilket den likväl ej är; den är endast skenbart en sådan; den har tillkommit» o. s. v. (ved den bekjendte Fremrykning, hvorom siden). Hvis Finnen er fremrykket, saa er den i alt Fald fremrykket i væsenlig samme Plan, hvori den før var, netop i Fiskens Midtplan! At selv udmærkede Naturforskere ikke altid udtrykke sig bestemt, saa at denne Regions Midtplan betegnes med samme Udtryk som hele Fiskens Midtplan, kan efter min Mening ikke retfærdiggjøre den her paaankede Uklarhed (jfr. f. Ex. Huxley: Anatomy of Vertebrates. I, p. 29).

mener med fuldeste Ret, er bleven betragtet som en væsenlig Del af den ene Sides Pandebensparti og kaldet med dette Navn, skal altsaa ifølge Traquair baade være et nyt, for andre Fisk fremmed, men for Flynderne eiendommeligt Parti, og ovenikjøbet hos disse kun fremkomme paa den ene Side af Hovedet. Forsaavidt som dette Parti følgelig for Dr. Traquair er et Ikke-Pandeparti, kan han jo nok forsvare sin Indvending imod mig og tildels imod Wyv. Thomson, at Flyndernes øvre Øie slet ikke ligger i en urigtig Stilling til sit Pandeben, nemlig paa den indvendige Side af dette eller af Ydreranden af det. Ligeoverfor Anatomernes hidtil hævdede og velbegrundede Anskuelse om Benbroens Knokler, havde det imidlertid været særdeles ønskeligt, for ikke at sige rent ud nødvendigt, at hans nye Opfattelse var bleven understøttet ved Paavisning af et mere objectivt Grundlag; men jeg kan ikke finde, at den væsenlig grunder sig paa andet, end hin feilagtige Antagelse af *pars pro toto*, af Mellembalken mellem Flyndernes Øine som repræsenterende en hel og fuldstændig Mellembalk*), det vil sige en saadan, som ikke blot er dannet ved Bidrag af begge Pandehælter, men indeholdende de sædvanlige interoculære Partier

*) Traquair (l. c. p. 272): «And now we see what the nature of that bar of bone is, which I have called pseudomesial (p. 267) and which one is apt at first to think homologous with the whole or part of the frontal arch in the Cod and other symmetrical osseous fishes. Seeing that the true homologue of the frontal arch in the Cod's head has been reduced to a narrow bar, and twisted over to one side (p. 269), we have, in the pseudomesial bar, a secondary formation, destined to supply the place of the weak and displaced frontal arch in forming a strong and efficient bridge of connexion between the anterior and posterior parts of the cranium, and also to support the cephalic continuation of the dorsal fin.» Allerede her tør jeg ikke tilbageholde den Bemærkning, at mig forekom det naturligere, at kalde «interocular bar», der efter hans egne Udtryk p. 287 er «connected with the deviation, in the ocular region, of the original middle line of the top of the head over to the now binocular side» med Navnet pseudomesial, og lade den «bar», som ikke «devierer», men bliver i Fiskens Midtlinie, vedblive at være «mesial», og at kaldes saaledes.

af disse fuldstændigen, saa at altsaa hvad der laa paa den ydre Side af det øvre Øie ikke hørte med dertil.

Det synes iøvrigt allerede slemt nok for denne Forklaring af Flynderhovedets osteologiske Bygning, at den maa tage sin Tilflugt til Elementer, der ikke skulle findes i andre Fiskes Hoveder, selv om disse, som i dette Tilfælde, kun ere meget stærke Udvæxter fra Ben, som ellers ere tilstede i Hovedet. Sagen bliver i alt Fald ikke bedre derved, at det, som ovenfor antydet, kun er paa den ene Side af Hovedet, at de særegne Elementer optræde. I Manges Øine turde det dog maaske være en væsenligere Indvending imod denne nye Betragtning, at netop paa dette Traquairske Ikke-Pandeben, hans «pseudo-mesial bar», bære alle Flyndre de selvsamme ydre Bygningsdele, der hos alle Fisk med en Rygfinne, som strækker sig frem paa Hovedet, slutte sig nøie til det Parti af Pandebenene, som vi Andre mene at gjenfinde i denne Bro og som vi regne med til en «mesial bar».

Som en saadan Indvending af større Vægt staar den i alt Fald ogsaa for Dr. Traquair. Han er sig den Vanskelighed velbevidst, som fremkommer derved, at Blindsidens Øie (smign. f. Ex. Slethvarren Fig. 14) ikke alene sidder som øvre Øie paa den modsatte Side af Hovedet, men ogsaa er kommet om paa den modsatte Side af Rygfinnen, saa at dennes Tilbehør af flere Dele, der ellers med Finnen normalt vilde strække sig frem imellem de to Øine og følge Pandebenenes Retning, nemlig Finnerodens Muskler og den over disse skraanende Tindingegren af Sideliniesystemet. Men for denne omvendte Stillings Fremkomst har han da en Forklaring paa rede Haand, som forlængst har været antydet af andre Naturforskere, først af Van Beneden, senere af Malm, saaledes som det allerede er bleven omtalt i min forrige Afhandling. Hverken Rygfinnestraalerne, siges der, eller deres Muskulatur, eller hine Tindingelinier naaede i den yngre Alder, medens Øievandringen udføres, saa langt fremad, ja ikke engang til Øiets Bagrand. Først naar

Øiet er kommen over paa den anden Side og Benbroen skudt udenom Øiet, ere de nævnte Partier efterhaanden blevne trukne frem forbi Øiet, og saaledes dette kommen paa den vrang Side af dem.

At denne Fremrykning af de nævnte tre Organpartier — hvis den virkelig finder Sted — ligesaa godt, og vel fuldt saa godt, kan gaa for sig, enten Grundlaget, hvortil de ere hæftede, er, hvad jeg har angivet, et tilbagestaaende Parti af Pandebenet eller af Anlægget til dette, eller det er den af Traquair formodede Nydannelse, fra hvilken Benbroen skulde have sin Oprindelse, er en simpel Selvfølge. En mindre eller større Fremrykning af Finnen med Tilbehør kaster altsaa ikke nogetsomhelst Lys paa Benbroens Oprindelse, men den forudsætter nødvendigvis Tilstedeværelsen af en saadan fastere, hindet eller benet Forbindelse, hvortil Finnepartiet m. m. er hæftet.

Da et af de Partier, der ere komne i en meget forkert Stilling til det øvre Øie, saaledes udgjøres af de to Tindinggrene af Slimrørssystemet og da i det Hele Gangen og Leiet af dette Systems forskjellige Grene paa Hovedet røbe særdeles vel den store Bevægelse, der har fundet Sted i Flynderhovedet under dettes Uddannelse, vil det være hensigtsmæssigt her at gjenkalde sig de normale Forhold i Øinenes Stilling til Slimrørgrenene hos Fiskene i Almindelighed og i Modsætning dertil de meget afvigende og særegne Forhold, der i denne Henseende optræde hos Flynderne (Tab. IV).

Ganske almindeligt kan man sige om de regulære Fiskeformer — saaledes som det jo ogsaa siden Monro's*) Dage er vel bekjendt — at de have Hovedet ligesom grimeagtigt omspændt af fire Linier eller Grene af det særegne Sanseredskab, der fra ældre Tider og fra ældre Opfattelser har beholdt Navnet af Slimrørssystemet, men som ogsaa uden Hentydning til nogen

*) The Structure and Physiology of Fishes explained and compared with those of Man and other Animals. Edinb. 1785. 4^o.

bestemt Function ofte benævnes simpelthen Sideliniesystemet. Den ene af disse Linier, den bagerste, udgaar fra Sidelinien omtrent ved eller over den øverste Rand af Gjællespalten og gaar ned over Forgjællelaaget og derfra ud paa Underkjæbens nedre Rand lige til Kjæbe-Spidsen. Den kaldes Forgjællelaagsgrenen, Præoperculargrenen. Den anden, der ligesom umiddelbart fortsætter Sidelinien, gaar fremad paa Hovedets øvre Flade, ud over Øietaget, nemlig over Isse- og Pandebenene, i hvilke Ben den mere eller mindre ligger skjult i egne Kanaler; den løber snart noget nærmere imod Midtlinien af Hovedet, snart nærmere imod Siderandene, men ender ligeledes fortil, imod Spidsen af Snuden, i de hule Knokler eller sammenrullede Benblade, der ere bekendte under Navnet *ossa turbinata* (o. *nasalia Cuv.*). Den benævnes Stamme- eller Pandegrenen, Frontalgrenen. Den tredie gaar tildels parallel med den den første, da den kort bag ved Øiet, i Reglen fra Bagpandebenet, stiger fra Stammegrenen nedad, følgende i kort Afstand først Øiets nedre og senere dets forreste Rand og saaledes bøier igjen op imod Stammegrenen ved Forpandebenet; den ligger optaget i en bueformig Kjæde af særegne Smaaben (*ossicula infraorbitalia*) og kaldes Infraorbitalbuen. Den fjerde Gren udgaar fra Stammegrenen over Tindingepartiet i Retningen fremad og opad skraat indad imod Midtlinien, fortsættende sig snart i en kortere, snart i en længere Strækning. Den er det, der sædvanligvis kaldes Tindingegrenen, Supratemporalgrenen. Disse Grene have hos de regulære Fisk det samme Løb paa begge Sider af Hovedet, og den ene Sides Grene staa som oftest ved Tværgrene i Forbindelse med Grenene paa den anden Side, og navnlig findes der næsten hos alle Fisk en større saadan Tvergren tværs over Pandepartiet.

Øiets Stilling paa Hovedets Sider i Forhold til disse Grene er hos alle symmetriske eller regelmæssige Fisk denne, at Øiet i Taget oven over sig har Pande- eller Frontalgrenen, mere eller mindre tæt ved Pandebenets Midtlinie, i en Halvbue under sig

derimod Infraorbitalgrenen med dens hele Kjæde af Smaaknoler, hvilke hos mange Fisk blive temmelig store og stærke og hos flere danne tilsammen ligesom en stærk Benvæg i Kinden, eller Kindpanser (Karpelax, Ganoider, Pantserkinder o. fl.).

Hos Flynderne derimod er Øiets Stilling til disse Linier en ganske anden og en for dem alene eiendommelig. Begge Øine sidde paa én Side af Fisken, og den modsatte Side har intet Øie. Paa denne saakaldte Blindside have Flynderne imidlertid Infraorbitalbuen løbende tæt op imod Pandepartiets Yderrand, der skulde have dannet Taget over Øiet med dettes Frontalgren, havde Øiet været tilstede; men imellem disse sædvanlige, øvre og nedre, Begrændsninger for Øiet, findes der intet Øie. Øiets normale Plads er tydelig betegnet, men Øiet selv er borte. Paa Øiesiden sidder det nedre i samme Stilling, som hos de normale Fisk, med Infraorbitalbuen under sig og med Pandebensranden som Tag over sig. Det øvre Øie derimod sidder med sin nedre Rand vendt opad imod Fiskens Rygkant, men uden at være omgivet af nogen Infraorbitalbue; dets øvre Rand vendt nedad imod den øvre Rand af den altid ufuldstændige Mellembalk, og hos alle Flyndre findes altsaa paa Øiesiden dette ny tilkomne Øie i en Region, i hvilken ellers hos Fiskene intet Øie forekommer, nemlig i Regionen mellem Øiebalken og Tindingegrenen, og heller ikke findes der i samme Region noget Øie paa den modsatte Side (Blindsiden). Men ikke alene dette; Regionen, der bærer dette øvre Øie, er her paa Øiesiden i Grunden omfattet af Øiesidens Tindingegren og af den om paa Øiesiden trykkede Del af Mellembalken, der hører Blindsiden til. Kun under saa extreme Udviklinger, som Argushvarrerne frembyde, hos hvilke der ikke længere i Mellembalken er Spor tilbage af Blindsidens Pandeben, kan det øvre Øie siges at have de nævnte Begrændsninger for Regionen hørende til én og samme Side. Paa alle Flyndre, hvis Skjælbedækning tillader det at følge disse

Grenlinier for Sanseredskabets Udbredning, er det meget let at overbevise sig om det Faste i Øiets Stilling til dem.

Figureerne Tab. IV, Fig. 1—3 ville som Typer for Slimrørgrenenes Leie hos Flyndre og regulære Fisk strax vise den gjennemgaaende Forskjel mellem begge.

Hvis man nu erindrer sig, hvor forskjelligt Øinene bæres hos Flynderne: hos nogle paa høire, hos andre paa venstre Side; hos nogle de to Øine stillede vidt fra hinanden, hos andre nærmere ved hinanden eller endog tætstillede; hos nogle begge Øine staaende i en nogenlunde lodret Linie over hinanden, hos andre i en meget skraa Linie, og da atter hos den ene Form det øvre Øie kjendeligen eller meget foran det nedre, hos den anden det øvre liggende langt længere tilbage end det nedre (T. II, Fig. 9); og hvis man da tillige betænker, hvad der nylig fremstilledes, at trods alt dette have de to Øine hos alle Flynderformer én bestemt Stilling til Hovedets Slimrørslinier og dertil en fra de normale Fisks paa en bestemt Maade afvigende Stilling, faar man fra en ny Side et levende Indtryk af det, der strax i Afhandlingens Begyndelse blev fremhævet om den indre Benbygning i Hovedet. Denne var jo trods alle de mange indenfor Slægterne og Familierne forekommende Modificationer paa éngang saa ensartet i Type og derhos i enkelte Knoklers Stilling, dels gjensidigen til hinanden, dels i deres Forhold til Øiet, saa afvigende fra de almindelige Benfisks, at det maatte stærkt fastholdes, at kun ved én og samme Fremgangsmaade i Afgivelsen fra det Regulære kunde hver Flynderart have faaet sin Form. I det Ydre finde vi altsaa, at denne Flyndernes Type-Enhed atter afpræger sig i de nævnte Liniers Gang og Leie i Forhold til de to paa én og samme Side af Fisken stillede Øine.

Men af Sideliniens Grene paa Hovedet er der igjen én, Infraorbitallinien, som synes mig bedst at afspeile Retningen og Udstrækningen af visse af de Bevægelser og Flytninger, der i de enkelte Former have fundet Sted imellem

de Dele, der sammensætte Øiesiden, saa at der paa samme Side kunde blive Plads for det tilkomne nye Øie med noget af dettes faste Omgivelser, navnlig mere eller mindre af Pandebenet fra den modsatte Side. Efter at det forlængst er afgjort, at Flynderformen ikke fremkommer ved nogen «torsion de la tête sur la colonne vertebrale», er det nu indrømmet af Alle, at det er den forreste Hælvte af Hovedet, navnlig Ansigtet, hvori Omflytningerne og de ved Trykket fremkaldte Uregelmæssigheder især finde Sted, og at den bag ved Øieregionen liggende Hælvte, den egenlige Hjernekasse, kun saare lidet paavirkes deraf. I denne Hælvte kunne vi selvfølgelig have langt fastere, ja næsten aldeles faste Punkter, til hvilke vi kunne tilbageføre og ved hvilke vi kunne bestemme de stedfundne Ændringer i Belligenheden af flere Dele i den mere bevægelige forreste Hælvte af Hovedet, f. Ex. af Øiet. Naar det nedre Øie hos den ene Flynder ikke ligger under sin Sides Pandeben, men under dens Forpandeben, og hos den anden Flynder endog under dennes forreste Ende (smlgn. Fig. 7 og 9—10, Tab. II), saa at intetsomhelst af Benbuen over Øiet er dannet af Forenden af Pandebenet, saa kan man med Sikkerhed slutte, at denne Øiets Fjernelse saa langt ud fra dets normale Stilling maa tilskrives væsenlig en ved Tryk udenfra frembragt Bevægelse af selve Øiet fremad; men da Ændringen af Pladsen er foregaaet i en Del af Hovedet, hvori megen Bevægelse finder Sted og i forskellige Retninger, tør den ikke alene tilskrives denne Grund. Men naar derimod det øvre Øie, som i Flynderens mere symmetriske Tilstand i Ungdommen, ligesom hos Fiskene i Almindelighed, havde kort bag ved sig et saa fast og bestemt Punkt, som Infraorbitalbuens Ophængningspunkt paa det saa rolige Kraniums Sider, hos den udvoxne Flynder findes med den bageste Rand saa langt tilbage paa Hovedet, at denne Rand ikke blot gaar kjendelig ud over dette Punkt, men hos flere endog meget langt ud derover, saa at dette Ophængningspunkt nu ligger en halv eller hel Øiediameter foran Øiets Bagrand, og hos de oftnævnte

Argushvarrer synes jo endog dette Øie at ligge tæt ved Nakken, da kan denne hele Afvigelse fra den ellers normale Stilling paa Hovedets Sider ikke godt være andet end en Følge af en tilbagegaaende Bevægelse af selve Øiet. Om Øiets stærke Bevægelse i denne Retning bære ogsaa de omgivende i Orbitaen indtrædende Knokler paa mange Maader utvetydige Vidnesbyrd, dels ved deres Bugter og Ombøininger og dels ved Benstraalernes Gang i de tynde Knokler. Hovedretningerne for Øinenes Vandringer, bestemte efter slige forskellige Forhold i selve Hovedet, søgte jeg i min forrige Afhandling i al Almindelighed at antyde bl. a. ved de Pile, der bleve anbragte igjennem Kranierne af de forskellige da aftegnede Flyndre, de samme Figurer, som igjen ere blevne aftrykte her paa Tavlen II og til hvilke jeg altsaa ogsaa i denne Henseende paany henviser. Hos Tunger og Hvarretunger, der oftest have det øvre Øie liggende mere fremmeligt end det nedre Øie, maa Retningen for Bevægelsen af det enkelte Øie formodentlig blive modsat, men tillige mere combineret paa Grund af den overordenlige Bøining nedad, som den forreste Del af Ansigtet er underkastet.

Det er altsaa denne ved de førnævnte Figurer (Tab. IV) oplyste Stilling af Øiet i dets Forhold til Rygfinnen, til den stærke Muskulatur, der fra begge Sider af Hovedet reiser sig op over Finneroden, og til hine Grene af Sideliniesystemet, som de tre nævnte Naturforskere, Van Beneden, Malm, Traquair og atter Malm, tænke sig frembragt alene derved, at Øiet først er drevet fra sit Hjem paa Blindsiden over paa den modsatte Side, og at derefter Rygfinnen, ledsaget af de andre Dele, er skredet mere og mere fremad paa Hovedet forbi Øiet. — Til Grund for Antagelsen laa i Begyndelsen kun en enkelt, men siden paa mange Former bekræftet Iagttagelse, at i en vis ung Alder stod Rygfinnens Forrand bag ved Øiets Bagrand, endog en halv eller hel Øiediameter fra denne, medens den hos halvt eller helt voksne Flyndre naaede frem over Midten af Øiet eller til dets

forreste Rand. Allerede Traquairs Undersøgelser varselede, at de Modificationer, som Udstrækningen af Finnen frembød hos de forskjellige store Slægter af Flynderfisk, skyldtes ikke blot Straalernes Antal, men deres fjernere eller tættere Stilling indbyrdes, og den mere eller mindre spidse Vinkel, som Finnestraalerne dannede med Støtteknoklerne, samt disse sidstes Længde og fremadliggende Stilling. — Ved Ændringer i disse Henseender vil altsaa det selvsamme Straale-Antal kunne indtage meget ulige Strækninger paa Hovedets Høikant.

Baade ved bestemte lagttagelser og ved oplysende Figurer (Tab. I, Fig. 7, 8, 9) har Dr. Malm i sin sidste Afhandling og navnlig for Slethvarrens Vedkommende søgt at godtgjøre Rigtigheden af sin Anskuelse ved at paavise, hvorledes i den unge Alder Finnestillingen forandrede sig i sit Forhold til Øiet, medens Antallet af Straalerne fra 1ste Nakkehvirvel til Forranden var det samme hos den unge Flynder, som hos den gamle. Paa Unger af kun 12 Mm. Længde staar Finneforranden $\frac{1}{2}$ Øiediameter bag ved Øiets Bagrand; paa dem af 16 $\frac{1}{2}$ Mm. lige ved Øiets Bagrand, og paa dem af 24 Mm. krydser Finnen sig med Øiet, saa at dettes Bagrand naar ind til 4de—5te Straale paa Finnen. Under den tiltagende Væxt fra 12 Mm. til det Dobbelte, 24 Mm., og medens jevnside med denne Væxt Øiet dreiede sig mere og mere over Hovedets Kant til Øiesiden og, omvendt, Finnens Forrand droges mere og mere over imod den modsatte Side af Hovedet, ere altsaa Øiets Midtpunkt og Finnens Forrand rykkede hinanden en hel Øiediameter nærmere. For de næste Væxtstadier har Dr. Malm, beklageligt nok, ikke angivet Stillingerne, skjönt man maa antage, at han direkte har undersøgt Forholdene ogsaa i disse. Men hos en meget stor Slethvarre paa 690 Mm. Længde, altsaa 28 Gange saa stor som den største af de anførte Unger, naaede Finnen fremad meget forbi Øiets Forrand, og denne Stilling mentes følgelig opnaaet ved fortsat Fremrykning af Finnen. Ungen af *Platessa limanda*, Sletten, forandrede under Væxten fra 12 $\frac{1}{2}$ Mm. til

15 Mm. Afstanden imellem Finnen og Øiet fra «en hel Øiediameter» til «en halv Pupillediameter», hvilket synes at antyde en lignende Forandring i deres gjensidige Stilling. Man synes derfor ikke længere at kunne med Rette betvivle, at den besynderlige Stilling, Finnen hos den voxne Flynder indtager i Forhold til Øiet, her kunde være fremkommen ved en Fremrykning af Finnen forbi Øiet; men ligeoverfor de Vidnesbyrd, Hovedets egne Dele afgive om stedfundne Bevægelser af anden Art, bliver det dog et berettiget Spørgsmaal, om ingen af disse kunde frembringe det samme Phænomen, ligesom der fra en anden Side maa blive en fuldt berettiget Tvivl om — og jeg idetmindste holder det ikke for tvivlsomt, men benægter det — at en Fremrykning af Rygfinnen skulde kunne forklare Finnens Forhold til Øiet hos mange af Flynderne, f. Ex. hos Argushvarrerne og lignende. Det er jo utænkeligt, at det Antal Straaler, der hos en Argushvarre findes langs ad Hovedet, kunde oprindeligen have staaet paa den yderst lille Distance fra Øiets Bagrand til Nakken, eller til den første Hvirveltorn, der bærer Straalestøtte? Men dette forudsætter dog denne Fremryknings-Hypothese!

Det mangler da heller ikke paa en stik modsat Anskuelse om Fremkomsten af denne Finnens forkerte Stilling til Øiet, den nemlig, at det er Øiets egne Bevægelser, der har fremkaldt den, idet Øiet langsomt er gledet tilbage paa Hovedet langs Finnens Rod: Tilbageglidnings-Hypothesen. Af denne Mening er idetmindste Professor Schiødte. I den foran S. 177 anførte Meddelelse fra 1865 giver han flere iagttagelser over Finnens og Øiets gjensidige Stilling hos meget unge Flyndre af en noget forskjellig Alder og finder, at en meget lille Unge af Rødspættten (*Platessa vulgaris*) paa 10 Mm. har sit øvre Øie umiddelbart foran Rygfinnen, en lidt større paa 14 Mm. har allerede første Finnestraale lidt indenfor Øiets Bagrand og en næsten tredobbelt saa lang Unge paa 40 Mm. har nu tredie Straale i den Stilling til Øiet, som da første havde. Hos en

lille Slethvarre (*Rhombus barbatus*), 18 Mm. lang, sad høire øvre Øie endnu helt foran Finnen; hos en anden paa 45 Mm. fandtes Øiets Midtpunkt i Linie med anden og tredie Straale, hos en tredie af 90 Mm. Længde i Linie med tredie og fjerde Straale, medens det med en Længde af 115 Mm. var rykket tilbage indtil femte og sjette Straale (S. 273). — Lignende Forhold frembød unge Individuer af den tredie Art, en Helleflynder (*Hippoglossus pingvis*). Man bliver let vaer, at om ikke de absolute Maalninger svare nøiagtig til dem, som Dr. Malm havde angivet for Individuer af lignende Størrelser, frembydes her dog nøiagtig den samme Skala for Ændringen i Finnens og Øiets gjensidige Stilling; men alligevel, ja uagtet det er de samme Arter, der have tjent til begge Undersøgelser, lyder Resultatet her dog helt anderledes — selv bortset fra den velbekjendte Ufeilbarheds Tone i Udtalelsen.

«For at forklare sig» — hedder det S. 272—73, og med de samme Udtryk fremhævede — «hvorledes Flyndrenes øverste Øie kommer i den Stilling til Rygfinnen, som det indtager hos de voxne Fiske, har man taget sin Tilflugt til den Hypothese, at Rygfinnen forlænger sig fremad, efterat det øverste Øie ved Hovedets Dreining er kommet paa sin blivende Plads. Mod denne Antagelse taler allerede, at Rygfinnens Straaletal hos Flynderungerne, idetmindste hos de her fremstillede, er det samme som hos den voxne Fisk. Men efter den ovenfor fremlagte Undersøgelse er Sagens Sammenhæng ialtfald nu afgjort: Blindsidens Øie dreier sig ikke blot over paa Øiesiden, men paa denne tillige tilbage, langsmed Rygfinnen. Det er altsaa Øiet, der flytter sig omkring Finnen, ikke Finnen, der voxer frem forbi Øiet.»

Denne «Sagens Sammenhæng» kan man dog neppe finde «afgjort» ved de «fremlagte Undersøgelser», ja ikke engang sandsynliggjort ved dem. Thi rigtignok indeholde de, foruden de Data, der ovenfor ere anførte, nogle enkelte Bibestemmelser dels om det øvre og nedre Øies gjensidige Stilling og navnlig

om, at hint i et lidt ældre Stadium (f. Ex. Rødspætteungen paa 40 Mm.) har sin Bagrand noget bagved det nedres (S. 271), medens begge Øine paa et lidt yngre Stadium (Ungen paa 14 Mm. f. Ex.) stode omtrent lige over hinanden, og dels om det nedre Øies Stilling i Forhold til Overkjæben (S. 270), men det, der savnes, er en klar Oplysning om, hvad der til denne «Afgjørelse» er bleven anseet for det faste eller de faste Punkter, fra hvilke Graden i de andre Deles Bevægelser fremad eller tilbage kunde maales. Af den hele Kontext synes imidlertid Tankegangen at fordre, at Finnens Forrand er antaget som stedfast og ligeledes det nedre Øie som ubevægeligt i Retningen fremad og tilbage (medens det i den lodrette Retning bliver bestemt angivet at rykke sin Stilling noget nedad paa Grund af det øvre Øies Tryk). — Har jeg nu ikke taget feil i Forudsætningen med Hensyn til det nedre Øie, da synes mig Bevægelsesretningen her bedømt efter Dele, der i denne Retning ikke ere stedfaste men derimod selv ere underkastede en ikke ringe Forskydning, og hvad den første Forudsætning angaaer, da kan Finnens Stedfasthed eller Mangel paa Fremskridning ingenlunde uddrages af en i saa ubestemte og almindelige Udtryk holdt Angivelse, som den af Forfatteren med spærret Skrift frembævede, at Straale-Antallet i Finnen var det samme hos de undersøgte Flynderunger som hos den voxne Fisk. Disse Ord kunne naturhistorisk kun sige saa meget, at det hos hver Unge ved Tælling fundne Antal af Straaler var et af de Tal, der forekomme hos udvoxne Individuer, men hos disse har man jo iagttaget en Variation i Antal af ikke faa Straaler — hvilket jo ogsaa er det Almindelige hos Fisk med Finner af stor Udstrækning — og ifølge vore nuværende Kundskaber tør man vel ikke benægte, at nogen Forøgelse af Straaleantallet kan være indtraadt siden den Tid, da Fiskene havde den ringe Størrelse, hvorom her Talen er, og at altsaa ogsaa en ringe Forøgelse endnu kunde have indtraadt for de undersøgte meget smaa Individuers Vedkommende. Men

til det foreliggende Spørgsmaals Afgjørelse ligger der ikke den ringeste Vægt paa, at Antallet af Finnestraalerne i det Hele er det samme hos Ungerne som hos de udvoxne Individder, thi en mulig Forøgelse af Antallet under Væksten vil i alle Fald, ifølge hele Finnens Dannelseshistorie, indtræde allerbagest i denne, og ved nye Fagelementers Tilsætning fortil kan Finnen aldeles ikke forlænge sig fremad. Tænker man sig nu Variationen i Straale-Antallet i den hele Finne fordelt paa mindre Strækninger af denne, hver med en Sum af Straaler, der svarer til det paa Hovedet hæftede Partis, og regner man dette Parti, der her er af speciel Betydning, med Dr. Malm fra den første Finne-Straale, som er hæftet til en Processus spinosus af Hvirvelsøilen, vil man for Hovedets Straaleparti neppe komme til en mulig Variation, der vilde gaa ud over én eneste Straale. Med en saadan Indskrænkning i den fremhævede Sætnings Forstaaelse, at der kun menes Antallet af Straalerne fra første straalebærende Hvirvel til Forranden, bliver Angivelsen bestemt og vistnok rigtig.

Men man vil nok skjønne, at dermed ikke er indrømmet, at dette samme Antal ogsaa skulde indtage samme Udstrækning hos det ældre Dyr som hos det yngre. Traquairs Bemærkning, at Strækningen maa blive større, hvis Finnestraalerne rykke længere fra hinanden, eller hvis Straalebærerne selv forlænges og Vinklen imellem dem og Straalerne ændres, er jo aldeles rigtig, og finder fuld Bekræftelse ved de af Traquair og Malm givne Figurer og Data, og, saavidt jeg kan skjønne, ogsaa hos alle de Flyndre af forskjellig Alder, der undersøges. Jeg skjønner heller ikke rettere, end at Prof. Schiødtes egne Figurer tale ligesaa stærkt for Finnens Fremrykning, som for Øiets Tilbagegliden. Eller hvorledes er det ved disse Figurer givne faktiske Forhold at forstaa (man sammenholde f. Ex. de tre Øiestillinger hos Rødspætteungerne Fig. 2 a, 3 a, 4 a, ligesaa Helleflynderungerne Fig. 5 a og 6 a)? Samtidig med at Øvre-Øiet viser sig længere tilbage end Nedre-Øiet, og enten er

rykket ind under Finnen eller Finnen rykket ud over dette, i samme Grad er just den første Finnestraale og Midten af Nedre-Øiet kommen hinanden nærmere! Den første Straale staaer jo paa de lidt ældre Individuer, Fig. 4 og Fig. 6, næsten lige over Midten af dette Øie, medens det hos den yngste Rødspætte kun stod over Bagranden, hos den yngste Helleflynder ikke saa lidt bagved denne.

Kunde virkelig, saafremt det nederste Øie skal være det fastere Punkt, en saadan Tilnærmelse have fundet Sted, uden at Rygfinnen var rykket idetmindste noget fremad? Og naar det efter Prof. Schiødtes Anskuelse ikke er «Finnen, der voxer frem forbi Øiet», hvorledes bliver da endelig det faktiske Forhold at forstaa, som er optaget i enhver zoologisk Haandbogs Karakteristik af Slægterne *Platessa* og *Rhombus*, at Rygfinnen naar hos den voxne Flynder fremad over Øiets Midte, eller nær dets Forrand, og hos den voxne Hvarre forbi dette ud imod Snudespiden, hvilket med andre Ord siger: Finnen naar nu langs ad Benbroen, paa hvilken den ikke var før, helt fremad nær til eller lige til Infraorbitalbuens forreste Ophængningspunkt, medens dens Forrand oprindeligen stod bag ved Øiets Bagrand omtrent i Linie med denne Bues bagerste Ophængningspunkt? Fra sidstnævnte Linie er det nu, at Øiet angives at gaa langs med Finnen bagtil; skal da denne Øiets tilbagegaaende Bevægelse forklare, at Finneforranden fra samme Linie af har skudt sig saa langt fremad over en lang Strækning af Hovedet, paa hvilken der oprindeligt ingen Finne var? Det gaar unægteligt over min Forstand!, men til min Trøst har jeg heller ikke til Dato truffet Nogen, der har kunnet forstaa Tankegangen i denne Bevisførelse.

Det vil ikke misforstaas, at naar jeg, indtil klarere og fuld-
stændigere Oplysning foreligger om Rigtigheden af den paa-
staaede «Afgjørelse» af Sagen, eksempelvis henstiller blot disse
enkelte Spørgsmaal til Tilhængerne af Tilbageglidningshy-
pothesen, da har jeg kun søgt at lede deres Opmærksomhed

hen paa det Samme, paa hvilket jeg ovenfor (sé S. 200) gjorde Tilhængerne af Fremrykningshypotesen opmærksomme, nemlig den tilsyneladende eller aabenbare Mangel paa en tilstrækkelig Hensyntagen til nærstaaende Former og Forhold, der ofte røbes i mere isolerede Undersøgelser, hvoraf et almindeligere Resultat udledes. (Hist: Hensyn til den ene Hvarregruppe ligeoverfor de andre, her: til Hvarrer og Flyndre i nogenlunde voxen Alder ligeoverfor deres smaa Unger).

Kun ved en saadan Mangel paa Kjendskab til det sammenhørende Komplex af det, man vil videnskabeligen drøfte, synes det mig forklarligt, at Tilhængerne af begge Hypoteserne have villet hævde, hver for sin, at den afgav den rigtige og ene tilstrækkelige Forklaring af den forkerte Finnestillings Fremkomst hos de voxne Flyndre, noget de ikke engang i Forening kunne. De ere begge for énsidigen fremholdte i Tanken og for lempeligen prøvede paa Naturen til at kunne give en tilfredsstillende Løsning af det man vilde nærmest løse: Stillingen af Rygfinnen til Øiet hos den voxne Flynder; og selve det, man tilsigtede opklaret ved Hypoteserne, er, efter mit Syn paa Sagen, ikke det, hvorpaa det her kommer egenlig an!

Det kan naturligvis ikke falde Nogen ind, der er fortrolig med Flynderfamiliens talrige Former, at ville benægte, at jo den gjensidige Stilling imellem Øie og Rygtünne er af stor Betydning for Uddannelsen af det særegne Fysionomi, hvormed hver enkelt Flynderform træder op. Men naar man derimod i dette Finnens Forhold til Øiet vil søge Besvarelsen af Spørgsmaalet om den almindelige eller egenlige Flynderforms Fremkomst lige over for den typiske eller normale Fisk, da mener jeg at man har feilagtigen vurderet et ydre og mindre væsentligt Fænomen. Ved Øiets Vandring fra den ene Side til den anden, og ved dets Indtagelse af sin nye Stilling paa denne, har man da ladet ude af tilbørlig Betragtning det hele Grundlag, til hvilket Finnen paa Hovedet er hæftet og

hvorpaa den glider fremad, hvis saadant finder Sted: den Del af Kraniet altsaa, hvortil Øiet hos Flyndrene — og alene hos Flyndrene! — træder i et saa fremmed eller, som man siger, forkert Forhold, den i det Foregaaende ofte omtalte Benbro i Fiskens rette Midtplan, ovenover det øvre Øie.

Forinden vi igjen optage Traaden om denne Benbro, maa jeg dog berøre et ikke uvigtigt Punkt, som man i Bedømmelsen af Finnens Forhold til Øiet turde være gledet lidt for let hen over. Klarest bringes maaske dette Punkt frem for Bevidstheden ved det ligefremme Spørgsmaal: naar skal det vandrende Øie anses for at være kommen over paa den anden Side, den modsatte Side af den, hvorpaa det oprindeligt var? Jeg for min Del vilde svare: naturligvis, naar det har passeret **Fiskens** Midtplan og er kommen frem paa den anden Side af denne, og det er Øiet hos Flyndrene saa snart det er kommen paa den anden Side enten af den straalebærende Del af Finnen eller af dennes straaleløse Fortsættelse fremad over Benbroen og delvis ogsaa naar det er kommen hinsides denne Benbro, i hvilkensomhelst Udviklingstilstand denne end maatte befinde sig, alt efter Øievandringens senere eller tidligere Indtræden. Hvad enten den nævnte straaleløse Del af Finneroden staar højere op fra Hovedet som en Hudkam, eller som en Hudfold er trukket ned og ud omkring Øiet paa dettes udvendige Side, saa er den for mig Fortsættelsen af den mediane Membran, hvori nedad Finnens uparrede Straalestøtter udvikle sig, og opad de parrede Elementer af selve Finnestraalerne. Det er efter min Mening ikke nok med Dr. Malm at betragte denne Kam eller Fold blot som en Slags Veiviser for den fremrykkende Finne. Det er tydeligen et Parti, som ved sin egen Ændring i Væxt nok bidrager væsentlig til at forandre Finnens Stilling imod Øiet, men ogsaa virker indirekte paa Øiets Flytning hos visse af Flyndrene. At Finnens og dens Grundlags Ryk i den ene Pandebensside udad afgiver en lige saa stærk Faktor i Øiets

Flytning, som de Tryk af forskjellig Art, der dreie Øiet over imod den modsatte Side af dette Pandeparti, turde vist ikke være tvivlsomt.

Men Betydningen af at klare sig det ovenfor fremsatte Spørgsmaal vil man let forstaa, naar man opmærksom vil sammenligne de nederste Figurer paa sidste Tavle (IV). De ere Kopier, laante imellem de af Dr. Malm givne Figurer af Flynderunger. Fig. 5 fremstiller en Tegning af en ikkun 12 Mm. lang Unge af en Tunge (*Solea*), som Forfatteren efter det friskt fangede og endnu levende Dyr udførte med al mulig Troskab i alle de Henseender, der her komme i Betragtning. Er der nu Nogen, der vil betragte den her og i Fig. 4 gjengivne Fisk anderledes end som en Unge, der er kommen til fuld Tungeform, med begge Øine paa Øiesiden, som hos den udvoxne? Jeg idetmindste anseer den derfor. — Alligevel turde der vel være Flere, som før ikke at støde an imod en tilvant Hypothese, ogsaa vilde godkjende den som Udtryk for et langt mindre fremrykket Stadium, hvis øvre Øie endnu var paa Blindsiden. Thi sé, hvor skuffende Fænomenerne kunne blive! Selvsamme endnu levende Unge kastedes umiddelbart efter Tegningen i svag Spiritus, for at opbevares til senere detaillerede Tegninger, og disse udførte Forfatteren et Par Dage senere, og det atter saa tro som muligt, og saaledes have vi nu i Figg. 6 og 7 Billeder af det selvsamme Individuum og paa det selvsamme Stadium. Saaledes som Dyret derefter viste sig, frembyder det jo et Udseende, der uvilkaarligen minder om Malms allerede omtalte Rødspætte- og Hvarre-Unger med det ene Øie op imod eller lige paa Hovedets Høikant (som Tab. I, Fig. 7—8; Tab. II, Fig. 9 og 10 af *Pleur. limanda*). Man sammenligne nu disse Figurer og den dem givne Tydning med den ovenfor givne af Solea-Ungen i levende Tilstand, og man vælg mellem Tydningerne! Hovedsagen er, at man ligeoverfor Fænomenet bliver sig bevidst, at dette kan modtage og har modtaget en dobbelt

Tydning, og at det altid ved nærmere Undersøgelse maa afgjøres, hvilken der er den rigtigere.

Forresten bliver det en Selvfølge, at jo mere inderlig man er overbevist om den igjennem samtlige Flynderformer gaaende Enhed i Kraniets Bygning og Overensstemmelse i dets Udvikling, jo mere maa ogsaa en Tydning af de ovennævnte Fænomener fordres sét i Sammenhæng med dem, jeg havde fremstillet hos de saakaldte «plagusia»-agtige, vandklare Flyndre, af hvilke jeg ved 3 Figurer havde efter Naturen oplyst tre Stadier i Øiets Stilling under dets Vandring fra den ene Side til den anden. Dette har man ogsaa gjort (Traquair, Malm o. fl.), men stedse saaledes, at disse sidste, skjøndt de ere meget større, inden Øieflytningen indtræder, og have meget mindre Øine, der utvivlsomt bane sig Vei gjennem Hovedet, stedse skulde underkaste sig den Tydning, som de til lagttagelse langt mindre gunstige Former mentes at give; men ikke omvendt!

Jeg har dvælet meget længere ved disse forskjellige Forsøg paa at forklare Finnestillingens Fremkomst, end de for Sagens Skyld efter min Mening have fortjent. Men da det efter Forsøgene, saaledes som de nu i flere Aar have foreligget og saaledes som Zoologerne have modtaget dem og de uretlig deraf dragne Resultater, syntes mig rimeligt, at Forsøgene let vilde blive fortsatte paa samme mindre tilfredsstillende Maade, saa har jeg ikke troet at burde unddrage mig for at henlede Opmærksomheden paa hvad der enten fra mit Synspunkt om Øieflytningen hos Flyndrene eller fra mit særlige Kjendskab til Flyndrene i Almindelighed syntes nødvendigt for om muligt at lede fremtidige Undersøgelser over i et mere alsidigt Spor. Jeg har alligevel paalagt mig en under disse Forhold stor Korthed. Derfor skal jeg ogsaa nu kun tilføie en Slutningsbemærkning. Jeg mener rigtignok, at Øiets Overgang fra den ene Side til den anden er, saaledes som jeg opfatter Fænomenet (sé foran S. 185), en meget simpel Proces, men derfor kan Øiets endelige Indtagelse

af sin Plads paa Øiesiden, tildels mellem nye Omgivelser, ofte være et temmelig sammensat Fænomen; og saavel under det første, som under det sidstnævnte Stadium kunne visse Dele fjernes kjendeligt fra hinanden for en kort Tid, for senere, naar de have givet Plads for det Pressende, at rykke sammen igjen (developped past it, som Englænderne passende sige). At det imidlertid er desto lettere at blive de enkelte Træk vaer, der foregaa under Øiets Flytning og dets Indtagelse af sin Plads paa den anden Side af Fisken, jo mindre Øiet er i Forhold til Hovedet, og som en Følge deraf tillige jo senere i Ungens Liv Flytningen skeer, vilde være for simpelt at gjøre opmærksom paa, naar ikke Erfaring viste, at dette oversaaes.

IV.

Per tot discrimina rerum staa vi endelig igjen lige over for selve Benbroen og dens Fremkomst (sé Tab. II, Fig. 7, *f' a'*, Figg. 8, 9, 10 *f, a*).

Min Hævdelse af Meckels, Cuviers og andre Anatomers Mening om den, at den dannes af selve Pandebenet i Forening med det tilsvarende Forpandeben, er i det Foregaaende tilstrækkelig berørt, og vi have nu i al Korthed at omtale de mange nye Anskuelser om den, som ere blevne fremsatte siden min første Afhandling og just for at undgaa det Moment i Øiets Flytning, jeg særlig havde gjort opmærksom paa, den tidligere eller sildigere skete Omflytning i det øvre Øies og dets Pandebens relative Stilling, der ligger saa tydelig udtalt i Benbygningen ifølge den indtil da gjeldende Opfattelse.

Dr. Traquairs Hypothese om Broens (pseudomesial bar) Dannelse derved, at særegne Udvæxter (external angular processes) paa den ene Side af Hovedet skyde sig hinanden imøde fra Pandebenet fremad og fra Forpandebenet bagtil og saaledes omgive Øiet, saa snart dette er kommen over paa Øie-

siden, med en ydre eller øvre Benvæg, er af det Foregaaende (S. 190 fig.) ogsaa tilstrækkelig bekjendt. Kun om ét Punkt skal jeg her tilføje en Bemærkning, om den Bevæggrund til ikke at ville anerkjende noget egenligt Pandeparti i Broen, som Traquair henter fra den af ham angivne Mangel af den ene Slimrørslinien, Stammegrenens, Leie i Broen. Jeg indseer nemlig ikke, med hvilken Ret han anseer Liniens Leie imod den ene Side af Pandebenet for et Bevis for, at den anden Side, der ikke maatte have Leiet, ikke tilhører Pandebenet; og jeg kan heller ikke indrømme Rigtigheden af, at f. Ex. hos *Platessa*-Arterne Stammegrenen ikke fortsætter fremad i Benbroen fra Tvergrenen af, saaledes som hans Text og Figurer angive det; thi hos *Plat. vulgaris* og *flesus* f. Ex. er dette jo tydeligt. Kan man endelig sammenligne Broens Udseende hos vor *Pl. saxicola* — *Pl. pola* hos Traquair — med Horkens (*Acerina cer-nua*) Pandeben uden at finde Flynderens «extraangular Process» skuffende ligne Horkens Pandeben i dets Forhold til Slimrørs-systemet?

Dr. Malm, som ikke var kjendt med Traquairs Fremstilling, da han indsendte sin større Afhandling til d. Kg. Sv. Vetenskaps-Akademi, men blev bekjendt dermed inden Trykningen fuldendtes, har paa Afhandlingens sidste Side tilføjet et «Tillæg», hvori han med al Anerkjendelse af Traquairs Arbejde udtaler sig stærkt imod den skotske Anatoms «extraangular processes», som Partier, der ikke skulde findes hos andre Fiske, eller paa begge Sider af Flyndrenes Hoved. Disse énsidige Udvæxter maatte jo ogsaa fremfor alt støde an imod en Opfattelse, der ikke anseer Flyndrene for virkelig usymmetriske Skabninger, men som kun tilsyneladende saadanne. I Virkeligheden afviger hans Anskuelse dog nok ikke saa stærkt fra Traquairs, som han selv antager. Ogsaa efter ham har Benbroen sin Oprindelse derfra, at en vis Del af Forpandebenet og ligesaa en vis Del af Pandebenet bøier sig imod hinanden og

omslutter Øiet, efter at dette har trykket sig mere og mere over paa den modsatte Side og tildels eller næsten aldeles har fortrængt den øvrige Del af sit Pandeben. De sig nærmende og sammensluttende Dele ere imidlertid ikke Nydannelser, men ifølge Malm Partier, der aldeles have deres Tilsvarende paa den modsatte Sides Pandeben og ved det modsatte Øie, og i det mest specielle angiver han hvilke enkelte smaa Regioner af disse Knokler og af Øiets Omgivelser, der svare til hinanden. Idet man med spændt Opmærksomhed og Anstrængelse forfølger paa hans Figurer de med Bogstaver og fine Linier afpælede smaa Strækninger, hvilke han tænker sig som fuldstændig identiske, maa man indrømme, at den hele Tydning er aldeles eien-dommelig, men ogsaa yderst vanskelig at følge. Jeg for mit Vedkommende maa hertil føie, at den ogsaa i alle sine Punkter forekommer mig i meget høi Grad tvungen og unaturlig. Uden de Malmske Figurer er det naturligvis ugjærligt at give Andre nogen klar Forestilling om den, eller for Andre at gennemgaa den i det Enkelte, om man ogsaa vilde det. Men for at min ovenforstaaende Yttring ikke skal staa uden al Antydning af de Paralleliseringer, som jeg anseer for vilkaarlige og uholdbare, skal jeg blot nævne et Par enkelte af dem, som jeg ved Hjælp af de fra min forrige Afhandling her atter gjengivne Figurer haaber at kunne anskueliggjøre. Det træffer sig nemlig saa heldigt, at til Type for Flyndrene og til Sammenligning med en normal Fisk, en *Gadus*, har Hr. Dr. Malm valgt Rød-spættten, hvoraf vi her ogsaa have et Kranium afbildet Tab. II, Fig. 7. I et saadant anseer han f. Ex. den velbekjendte indre, i Øiebalken liggende Flig af venstre Pandeben (i vor Figur betegnet med *f'*) som modsvarende af det høire Pandebensparti, ikke den Del af samme, hvortil den nærmest støtter sig, men just den Del, der ligger foran og støder op til Forpandebenet! Dette hævder Forfatteren, uagtet han er en af de saare faa Zoologer, som er saa vel bekjendt med de nordiske Flynder-

Arters Kraniebygning, at han véd, at hos enkelte Arter af disse fortsætter denne Flig sig længere fremad og hos én af dem (*Platessa microcephala*) udgaar der endogsaa fra Fligens Spids en triangular Forlængelse, som med sin bredere Ende støder lige til Forpandebenet (sml. Malm S. 13), hvorved det jo bliver fra en ny Side utvivlsomt, at Fligen f' i Øiebalken er kun en indre og bagre Rest af Pandebenet, hvis forreste Del er, med de nævnte Modificationer hos et Par enkelte Arter, bleven aldeles resorberet ved Øiets Tryk. Saaledes faaer nu enhver lille Region en Tydning, som den neppe nogensinde før har faaet, og det venstre Forpandebens halvmaaneformede indre Rand, der fortil tildels begrænder Orbita, identificeres saaledes med den Bugtning, der paa høire Forpandeben findes udad mellem dets stærkt fremstaaende Proces og Pandebenssømmen (hos Malm $a' 9 = a 10$); hele venstre Pandebens ydre Rand fra Sømmen med Bagpandebenet til Sømmen med Forpandebenet paralleliseres med Strækningen paa høire Pandeben fra Sømmen med Bagpandebenet indtil en Linie i Flugt med Øiets bageste Rand! o. s. fr. Hvorledes Forfatteren f. Ex. tænker sig, at under hans Tydning Blindsidens Infraorbitalbue kan være i sin rette Stilling, eller de skjæve Øiemuskler i deres, er mig ikke ret forstaaeligt.

Den hele Tydning gaar imidlertid ud fra den Forudsætning, at der var en Tid, da denne Benbro ikke omsluttede Øiet, da Pandebenets bag ved Øiet udstaaende Parti ikke naaede hen til Forpandebenet, og aldeles tydeligt udtales dette ogsaa i det Tankeexperiment, han S. 10 anstiller til Oplysning om sin Tydning, samt i den nævnte Figur af Rødspætten (Malm, Tab. I, Fig. 1) ved de punkterede Linier x og x' , der i ringe Afstand følge Grænsen mellem Forpandebenet og Pandebenet. Men om Fakta, der tale herfor, tier Afhandlingen helt igjennem, uden i det Par Linier S. 22 og 23, hvor der, i Forbigaaende, synes udtalt som Kjendsgjerning, at der netop hos det allermindste af Malm

iagttagne Stadium af Slethvarren, de før omtalte Unger paa 12—18 Mm., var et lille Gab mellem de to ovennævnte Ben. Side 22 hedder det nemlig om den 12 Mm. lange Unge: «Utvændigt är högra sidans frontale proprium ännu åtskildt från samma sidas frontale anterior, hvadan äfven den högra orbita nedtill är öppen». Og om det Individ paa 18 Mm., i tørret Tilstand $17\frac{3}{4}$ Mm., hedder det S. 23 nederst i Beskrivelsen af Rygfinnen: «Roten af det första (interspinalbén) ligger något bakom bakre kanten af den högra ännu öppna orbita». Man lægge Mærke til de i de to Sætninger her fremhævede Udtryk, og erindre sig, at Ordet «nedtill» i den første endnu betyder nedad eller udad, ikke som hos de voxne Flyndre «opad imod Ryglinien», smlgn. foran S. 190, Anm. — Uagtet Forfatteren har givet ikke færre end 3 Figurrækker af Flyndre af denne unge Alder, uagtet endogsaa Kraniet er skitseret fra den ene Side (Tab. II, Fig. 13) af det ene Individ, saa er dette for den Malmske Tydning, ifølge min Mening meget vigtige Forhold, der optræder paa den anden Side af Kraniet, hverken afbildet eller nøiere beskrevet; ei heller er det kommenteret, men man kan efter det før nævnte Tankeexperiment og den omtalte punkterede Linie $x-x'$ i hans *Platessa*-Figur neppe nære Tvivl om, at han i denne saakaldte Aabning seer ligesom en Levning af den Vei, hvorigjennem Øiet i sin Tid menes at have skudt sig ind. — Der er ikke engang antydet, hvorledes denne Aabning er at forstaa; om der aldeles ingen Art af Forbindelse var imellem Pandebenet og Forpandebenet, eller om der kun var et blødere, endnu hindeagtigt Parti imellem dem, thi Pandebenet er jo, som bekjendt, ikke dannet af noget bruskagtigt Grundlag, men af et membran- eller hindeagtigt. — Disse besynderlige Mangler i en saa vigtig Angivelse hindre mig i at tillægge den, enestaaende som den er, en saadan Betydning, at jeg har kunnet udtrykke mig anderledes, end jeg foran (S. 183 medio) har udtrykt mig, og det saa meget mindre, som andre Undersøgere af Flynder-

unger af endnu ringere Størrelse direkte eller indirekte angive det Modsatte (Schiødte, Klein), sé senere S. 220—21*).

Vi komme nu til den fjerde nye Opfattelse, den af Dr. Prof. Reichert fremstillede og ved smukke Figurer belyste. Den vil bedst forstaas ved en historisk Henvisning. I min forrige Afhandling havde jeg rettet den i Dr. Malms første Afhandling af 1854 fremsatte Mening, at Benbroen udenfor Øiet var dannet af en stærk Infraorbitalbue, idet altsaa enten selve Infraorbitalbuen dengang var undgaaet ham, eller Broens rette sammensætning ikke havde staaet ham klar. Denne Feiltagelse har Dr. Malm i sin sidste Afhandling fuldt vedkjendt sig og hans Anskuelse har vi jo nu seet at gaa i en Retning, der lader Benbroen bestaa af de rigtige Knokler, om end hans Tydning af disse Knoklers Enkeltheder maa vække alvorlig Indsigelse. — Det er nu i Grunden, saa utroligt det end maa synes, dette overvundne Standpunkt hos den svenske Zoolog, som den ovennævnte berømte Berliner Zootom igjen har fundet det naturligt at stille sig paa, idet han dog dermed forbinder en ny Udgave af den Traquairske Anskuelse om «extraangular processes» fra Forpandebenet og Pandebenet, uagtet det forøvrigt er klart nok, at han lige saa lidt har været bekjendt med den skotske Anatoms Arbeide, som med Dr. Malms. Han

*) I dette Punkt kunde altsaa Dr. Malm med en vis Ret beskyldes mig for at betvivle noget, han synes at angive som en positiv Iagttagelse, det indrømmer jeg; men det er med Uret, naar han paa mange Steder i sin Afhandling (S. 11, 12, o. fl. St.) gjør stærke Angreb paa mig under det Paa-skud, at jeg betvivler og benægter som positiv Iagttagelse, hvad han har bestemt anført som saadan; thi han skjelner ikke imellem Iagttagelsen, (her Øiets Stilling paa det iagttagne Individ, hvormed jeg ikke har yttret Skygge af Tvivl), og hans deraf dragne Slutninger om de Veie, det siden vilde gaa for at naa sin Plads paa den modsatte Side af Hovedet. Disse er det jeg, indtil deres Rigtighed maatte stadfæstes, har tillagt Navnet Formodninger og Hypotheser. Først i denne sidste Afhandling har han om den da enkeltstaaende Iagttagelse stillet den Række andre Iagttagelser, der før manglede og som kunde stille hans Slutning sikkrere, i det mindste i en enkelt Retning.

lader just fra hvert af de nævnte Ben komme en «infraorbital Proces» for at forene sig med en latent Infraorbitalbue til Dannelsen af Benbroen. — Forfatteren indrømmer imidlertid, at han hverken imellem de tvende Knokler, der danne Benbroen, har kunnet finde Spor af adskilte Benstykker, som kunde minde om Infraorbitalbuens Led, heller ikke indenfor Knoklernes imod hinanden vendende Dele har kunnet sé Benkjærner, der kunde antyde, at de i Fostertilstanden have bestaaet af adskilte Stykker. Han har endogsaa forud indrømmet, at der heller ikke hos de almindelige symmetriske Fisk findes saadanne Forhold i Kraniets Benbygning, som kunde give den Anskuelse Medhold, at alene et *Præfrontale* og et *Frontale medium* kunde i Forening træde sammen til Dannelsen af en Infraorbitalbue. Med alt dette er hans overraskende Opfattelse fremsat i utvetydig Form og vel bedst i følgende fra S. 207 laante Sætningsrække:

«An dem mir zu Gebote stehenden Beobachtungsmaterial habe ich indessen weder deutlich gesonderte Knochenstücke zwischen den beiden Processus infraorbitales, noch auch die letzteren selbst als gesonderte Knochen vorfinden können. Auch scheint es fast, dass die beiden Fortsätze im embryonalen Zustande der Thiere nicht aus gesonderten Knochenkernen hervorgehen, die erst später mit den Hauptstücken des Praefrontale und Frontale medium verwachsen wären, etc. — — — — Wie dem auch sei, nach dem vorhandenen empirischen Material hat man die Processus infraorbitales als dem Praefrontale und Frontale medium zugehörige Fortsätze und als die beiden den infraorbitalen Knochenzug der Plattfische allein bildenden Knochenstücke bei der vergleichend-anatomischen Analyse zu verrechnen. Es genügt dann aber nicht, einfach zu sagen, die in Rede stehende Knochenbrücke werde von dem Praefrontale und Frontale medium der augenfreie Seite gebildet, sondern man muss darauf hinweisen, dass darin der Knochenzug des Infraorbitalringes gegeben sei, und dass derselbe zum Unterschiede von den symmetrisch gebauten Teleostiern durch zwei neue — vicariirend

und zum Ersatz für die ausgefallenen Infraorbitalknochen entwickelte — Knochenelemente, durch die Processus infraorbitales des Praefrontale und Frontale medium, construiert werde, die am normalen Infraorbitalringe nur als kaum bemerkbare Befestigungsfortsätze der eigentlichen Infraorbitalknochen an dem vorderen und mittleren und hinteren Stirnbein auftreten.»

Det ligger mere end nær, at opkaste det Spørgsmaal: hvorledes har en saa fremragende Zootom, hvis Afhandling iøvrigt indeholder saa mange træffende Punkter, f. Ex. om Asymmetrien o. fl., kunnet overse den virkelige af Smaaknokler sammensatte Infraorbitalbue med sit meget forskjellige Løb paa Hovedets to Sider, og navnlig overseet Blindsidens langs med Benbroens ydre Rand liggende Bue? (sé Tab. II, Figur 7'). Svaret er simpelt: Af flere Grunde, thi Texten saavel som de smukt udførte Figurer vise tydelig nok, at den stærke naturfilosofiske Tendents hos Forfatteren uheldigvis har ledet ham til at filosofere over det i hans store Museum opstillede Materiale, uden at overbevise sig om, hvorvidt hans Kranier vare fuldstændige med Hensyn til Infraorbitalbuerne, der jo saa ofte ere bortpræparerede paa de Fiskekranier, hos hvilke deres Knokkelkjæde ikke optræder i stærkt udviklet Tilstand, og uden at raadspørge enten levende eller i Spiritus opbevarede Flyndre om Løbet af deres Slimrørslinier, samt derhos tillige uden at tage mindste Hensyn til en saa nær liggende Literatur i Emnet, som Dr. Traquairs Arbeide.

En saa væsenlig Forsømmelse i den anatomiske Undersøgelse gjør os et andet af Professor Reicherts Resultater forstaaeligt; medens de almindelige Benfisk som bekjendt kunne siges i Reglen at have tre Benbroer («Knochen-Züge oder -Brücken») fra Hjernebassen hen til Os Ethmoideum, nemlig én median, Øiebalken, dannet af de egentlige Pandeben og Forpandebenene, og to laterale, dannede af Infraorbitalbuerne, saa mener vor Forfatter, at det for Flyndrene

bliver karakteristisk kun at have to af disse, én median og én lateral, nemlig imod Blindsiden og tænkt opbygget paa den ovennævnte Maade. Sandheden bliver imidlertid just den modsatte, at Flyndrene, i Modsætning til de symmetriske Fisk, optræde med fire Knokkelbroer, to laterale, dannede af Infraorbitalbuernes Knokkelkjæder, hvilke begge vare bortpræparerede paa Reicherts Materiale, og to mediane, idet Blindsidens Øie skyder Mellembalken ud til to Sider.

Denne Overseen af Infraorbitalbuerne hos Flyndrene er iøvrigt saa meget mere paafaldende, som det jo saavel af Prof. Reicherts Text som af hans Figurer (f. Ex. T. VI, Fig. 3, 4, 6) fremgaar, at idetmindste den forreste Knokkel af Buen havde vakt hans særegne Opmærksomhed og derfor burde have ledet ham til at opsøge den hele Kjæde af disse. — Men heri staar han ikke ene i Tydskland. — Den foran S. 177 nævnte Würtembergiske Anatom, Dr. Klein, fremhæver saaledes i 1868 Tilstedeværelsen af den forreste Knokkel af Infraorbitalbuen hos Hvarrer og Flyndre (S. 274, 286, 287, og T. VI, Fig. 8, 10, 13 a), men uden at det synes at han er bleven selve Linien vaer. Ja endnu mere, den for sine talrige osteologiske Undersøgelser bekendte Wienske Zootom, Professor Dr. Brühl, gjør endnu i 1875 store Ophævelser af at have fundet de forreste Smaaknokler af Blindsidens Infraorbitalbue hos Pighvarren, *Rhombus maximus*. I sit nedenauførte store zootomiske Atlas*) siger han i «Atlaserklärung» til «Tafel p. V», der fremstiller Pighvarrekraniet

*) C. Bernh. Brühl, o. ö. Professor der Zootomie und Vorstand des Zootomischen Institutes der Wiener-Universität: Zootomie aller Thierklassen, für Lernende, nach Autopsien, skizzirt. Illustriert durch 200 Tafeln. gr. 4^{te}. Wien.

En grov og ubegribelig Feiltagelse med Hensyn til mit Arbeide over Flyndrene, som Prof. Br. har begaaet i Oplysningen om sin instructive Tavle over Hvarrekraniet, griber jeg her Leiligheden til at rette. I Form af berigtigende Parentheser giver han mig Skyld for at lade Hvarrens øvre Orbita være den venstre («nach Steenstrup ist es die linke») og den nedre være den høire («nach Steenstrup beherbergert sie (den ufuldstændige Orbita) das rechte von rechts nach links gewanderte? Auge»).

fra Øie- og Blindsiden: «Von bisher noch nicht von mir veröffentlichten, jedoch seit Jahren gelehrten Thatsachen findet man dargestellt: in fig. 2 die af der øgenlosen (rechten) Seite zurückgebliebenen, jedoch rüdimentären Infraorbitalknochen: *i. o^d* (sammenlign Specialforklaringen af Figurerne 1 og 2, som staa nedenunder; her hedder det endog om Øiesidens *i. o^t*: «Der einzige Infraorbital-Knochen der linken Seite.»).

Af de nye Anskuelser om «Benbroens» Fremkomst udenom Øvre-Øiet hos Flyndrene har jeg nu ikke andre tilbage*), end den af Professor Schiødte fremsatte, og denne danner en bestemt Modsætning til alle de foranførte. Prof. Schiødte synes baade at fastholde samme Tydning af Bestanddelene af Broen, som Videnskaben tidligere havde hævdet, og at indrømme det øvre Øies forkerte Stilling til Pandebenspartierne, saaledes som jeg saa stærkt havde fremhævet det, men alle de Vanskeligheder, som Flynderhovedets osteologiske Bygning havde budt mig og Andre, dem sætter han paa en egen Maade med en næsten misundelsesværdig Lethed ud over.

Sine Bemærkninger om de smaa i det Foregaaende nævnte Flynderunger fortsætter han nemlig saaledes S. 273:

«Vil man nu endda give noget Spillerum for en fremmeligere Væxt i den første Tid efter Udklækningen, saa bliver det dog indlysende, naar Ungen paa 10 mm. sammenholdes med de to andre Unger paa henholdsvis 14 og 40 mm., at Øiestillingens Udvikling overhovedet efter Fødselen foregaar med stor Langsomhed, hvorfor den tilkommende Blindsides Øie hos den nyfødte Fisk neppe kan være fuldkommen sidestillet. Da Øiet nu allerede hos Ungen paa 10 mm. i alt Væsenligt har samme Stilling til Hjerneskillens Been som hos den voxne Fisk, altsaa ligger indesluttet i sin Øiegrube**),

*) Dr. Klein har nemlig ingen særlig fremsat.

**) Alt det Spærrede i dette Citat er fremhævet af mig.

saa fremgaar af denne Sammenstilling en høi Grad af Sandsynlighed for, at Pandebenenes og Forpandebenenes Anlæg om den tilkommende Blindsides Øie i alt Væsenligt allerede har fundet Sted i Fosterlivet og man vil heller ikke, efter hvad vi overhovedet vide om Fosterdannelse, let kunne tænke sig Sagen anderledes. Men herefter kommer det hele Forhold ind under en almindelig biologisk Regel og bliver simpelt nok at overse: Flynderungerne fødes med en Øiestilling, der er afpasset efter et Liv høiere oppe i Vandet, og som langsomt og efterhaanden bliver mere og mere skjæv, i samme Forhold, som de voxne Fiske ere mere Bunddyr, eller dog i Levemaade og Færd beregnede paa Bevægelse mod en fastere Flade. Heraf den bekjendte lange Række af Overgangsformer, ligefra *Hippoglossus pinguis*, der ikke i nogen betydelig Grad ændrer den Form, hvori den fødes, og til Tungerne, som ere kastede heelt om paa Siden. At dog Rækken ikke ganske begynder med *Hippoglossus pinguis*, men at der endnu foran denne kan stilles en anden Flynder, som endnu mindre fjerner sig fra den symmetriske Fiskeform, fremgaar af Fig. 7a og 7b, som fra høire og venstre Side fremstille Forkroppen af en lille, maaske ikke ganske voxen, omtrent 25 mm. lang, oceanisk Flynder, der endnu ikke synes at være opstillet som en egen Form, og derfor her indføres som saadan under Navn af *Bascanius tædifer* *).

Ifølge denne Udvikling finder Forf. det altsaa ikke alene i høi Grad sandsynligt, at Pandebenenes og Forpandebenenes Anlæg om den tilkommende Blindsides Øie i alt Væsenligt har fundet Sted under Fosterlivet, men mener endog at vore Kundskaber om Fosterdannelse ikke let tillade os at tænke Sagen anderledes. Dette sidste Led er en noget stærk Tale at døie for Zoologer i Almindelighed, der vist vanskelig ville kunne gaa ind paa denne Tankegang, men navnlig dog for de allerede

*) Sé senere. S. 231 flg.

ikke faa, der have søgt at hævde, at den voxne Flynders Øiestilling til Pandebenspartiet hos nogle Flynderformer først indtræder i en mere fremrykket Alder, hos visse endog først, naar Dyret har naaet en Størrelse af en Tomme eller derover. Ogsaa det første Led om den høie Grad af Sandsynlighed for at Pandebenenes og Øiets forkerte Stilling — selv om det kun var hos en enkelt eller enkelte Flynderformer — i alt Væsenligt skulde have sin Grund i et oprindeligt «Anlæg» i Fosterlivet, kan for enhver Zoolog, der er nogenlunde fortrolig med Dyrenes Udviklingshistorie, kun staa som en tom Frase. Andet kan det nemlig ikke blive, saalænge Sætningen, som her, henkastes uden nogensomhelst Antydning af, hvor man da i den hele Dyrenatur finder noget Tilsvarende enten i Almindelighed eller i det Særlige, uden al Henvisning til bestemte Analogier. Talen er jo her ikke om et oprindeligt «Anlæg» af noget, med Hensyn til Fiskens Midtplan blot og bar Usymmetrisk, men om bestemte Organers og Bygningsdeles oprindelige «Anlæg» i én, og med de øvrige Hvirveldyrs Bygning overensstemmende Orden paa den ene Side af det symmetriske Dyrs Midtplan, og i en anden og omvendt, fra den fælles Opbygningsplan afvigende Orden paa den anden Side! Kjendes der i Udviklingshistorien noget analogt til en slig Ordning uden som Følge af en Omordning, Omleiring? Turde man derfor opfatte Meningen af min Collegas Ord saaledes, at de kun sigtede til Omflytningen af Øiet og Pandebensgrundlaget og ikke til selve «Anlægget» af dette i Fosterlivet, da vilde en saadan Opfattelse ikke staa meget langt fra den, der indrømmer, at Omflytningen finder Sted i høist ulige Alder og hos visse Flyndre i en meget tidlig Tid, om end denne maaske ikke tænkes rykket tilbage til Udklækningen af Ægget*). Men en saadan Til-

*) «Bey den Flundern des Flachwassers, geht die Wanderung des Auges resp. Verdrehung der Kopfknochen gleich nach dem Ausschlüpfen aus dem Eie, also schon bei einer Grösse von 4—6 Mm. vor sich, davon habe ich mich selbst überzeugt», yttre den altfor tidlig bortkaldte Dr.

nærmelse i vore Anskuelser stemmer rigtignok ikke med den næste Sætning i Udtalelsen, der synes mig at maatte forstaaes saaledes, at den symmetriske Stilling af Øinene hos den unge Flynder skal være et biologisk Forhold og et Afspasnings-Arrangement for et Liv høiere oppe i Vandet, istedetfor at være et simpelt, typisk Grundforhold, der som saadant gaar igjennem Dyrene i hvilke Dybder de end leve. — Men Sætningen er vist ikke ret tydelig? *)

Inden jeg forlader Forfatterens Anskuelse om Øiets oprindelige Forhold i sin Øiengrube, maa jeg erindre om den nye Combination — for ikke at sige Vanskelighed —, som derved fremkommer med Hensyn til den tilbageskridende Bevægelse, Øiet skal gjøre hen under Finnen (sé hans Ord herom S. 201).

Willemoes-Suhm i sit tredie Challengerbrev til Prof. Dr. C. Th. v. Siebold (S. XXXVII). Just som en Modsætning til Expeditionens i Oceanet fangne Flynderskikkelser, der endnu vare symmetriske med en Længde af én Tomme, sætter altsaa denne Naturforsker ifølge egne Iagttagelser Omflytningen af Øiet hos vore almindelige Flyndre meget nær til Udflækningen af Ægget. —

Ifølge egne Iagttagelser angiver ogsaa Dr. Klein, at Flynder- og Hvarreunger allerede paa 5, 6 og 8 Mm. Længde have Øiet fuldstændig omgivet af Pandebenspartierne.

S. 303 hedder det saaledes: «ich hatte Gelegenheit, einige Rhombus zu untersuchen, von welchen zwei nur 5 Mm., ein dritter 6 Mm. massen, und doch stand das linke, später obere Auge (altsaa en Flynder) schon mehr nach oben gegen den Scheitel. Bei einem vierten von 8 Mm. Länge stand das obere, hier das rechte, welches nach links rückte, auf der Mitte des Kopfes . . .» og S. 304 fremdeles om de samme Unger: «so war auch bei den oben angeführten Fischen von 5, 6 und 8 Mm. Länge das obere Auge von einem deutlichen Knochenrand umgeben, lag in einer von Knochen, d. h. Knorpel gebildeten Augenhöhle». Til denne sidste Iagttagelse er det jeg henviser ovenfor S. 214; — «Knorpel» er naturligvis her at forstaa kun som et Udtryk for: endnu ikke-forbenet.

*) At den «almindelige biologiske Regel», ind under hvilken Prof. Schiødt mener at Flynderbygningen kommer, idetmindste ikke skal forstaaes saaledes, som Dr. Klein har forstaaet den, nemlig som om alle Bundfisk skulde være skjæve og usymmetriske, er mig imidlertid klart nok. «Wenn obiges Gesetz richtig wäre, so müssten alle auf dem Grunde lebenden Fische consequenterweise asymmetrisch sein». S. 305.

V.

Om Misdannelserne af den Form, som i min foregaaende Afhandling kaldtes «Cyclopflyndrene», fordi det øvre Øie laa ligesom i Hovedets Høikant, og hvis særegne Dannelse netop var draget ind med i Beviserne for, at en Omflytningsakt i visse af Hovedets Dele maatte holdes vel ude fra den længe kjendte Omdreiningssakt imod den ene Side, have de i Mellemtiden fremkomne senere Arbejder egenlig ikke tilføiet noget Nyt. De give mig imidlertid Anledning til tvende Bemærkninger, én af almindelig, og én af mere særlig Natur.

Af alle de talrige Tilfælde af denne Form gaar det nemlig tydelig frem, at en stærk Benbro udenfor Øiet (naturligvis det øvre) er et gjennemgaaende og constant Fænomen, og at der hidtil ikke er bleven paavist mindste Spor af Gab eller Aabning deri, som kunde hentyde til saadanne tidligere Tilstande, som de af Prof. Wyville Thomson, Dr. Traquair, Dr. Malm og Fl. hyldede, og i det foregaaende Afsnit omtalte Anskuelser forudsætte. Derimod vise Cyclopflyndrene en tydelig Variation i de to andre Forhold, der ere knyttede til dem: i Øiets Stilling mere eller mindre paa selve Hovedets Høikant eller imod denne, og i Rygfinnens ligefremme Standsning bag Øiet eller dens Forrands Fremtræden over Øiet i en ligesom fribleven triangulær Lap. Man sammenligne den paa Tab. III fra forrige Afhandling gjenoptagne Fig. 12 af *Donovans Pleuronectes cyclops* med Fig. 13 af Yarrels «Malformed Brill» eller Slethvarre. Naar nu ganske almindeligt disse Misdannelser ere blevne betragtede som en Slags Standsningsdannelser, og deri har jeg ogsaa selv deltaget, saa er vel det mere direkte Vidnesbyrd for, at det sædvanlige Tryk og den deraf betingede Dreining om imod Øiesiden ikke er udført fuldstændig, nærmest at søge i Øiets Stilling; og det kan i alt Fald kun blive et mere indirekte Vidnesbyrd om en Standsning i Uddannelse, der faar sit Udtryk i Finnens Forhold. Hvor denne, som hyppig er Tilfældet (smlgn. Fig. 13),

hænger som Flig frem over Øiet, skulde jeg ikke være utilbøielig til at antage, at en Resorption fra nedent — navnlig ved en Collision med Øiets Bevægelser — har bidraget til at løse den, og kun at saadanne Forhold, som Donovans *P. cyclops* frembyder, turde komme ind under Standsningsfænomenerne. Benbroens constante og fuldstændige Tilstedeværelse i disse «Standsningsdannelser» er og bliver derimod — som jeg i min forrige Afhandling gjentagne Gange frembævede: S. 151, 177 — et fast Vidnesbyrd om, at der blot ved en simpel Omdreining-akt i Øieregionen og en Fremrykning af Finnen ikke af det almindelige Fiskehoved kan tilveiebringes et Flynderhoved. Dette fører mig til min specielle Bemærkning.

Blandt de i min forrige Afhandling som Led i Cyclopflyndernes Række fremdragne Exempler mener Dr. Malm at jeg har gjort Uret i at sætte den yngste, den af ham iagttagne og som aldeles normalt Udviklingsstadium betragtede Unge af Sletthvarren, fremstillet her igjen paa Tab. III, Fig. 11; men dengang forelaa der mig ingen Sandsynligheder for det Modsatte; disse ere først fremkomne i Forfatterens sidste Afhandling, og endnu ere ikke alle mine Betæneligheder imod Dyret forsvundne. Men naar Dr. Malm gaar saa vidt, at han ytrer Tilbøielighed til at antage, at ogsaa Donovans $1\frac{3}{8}$ Tomme lange Pleur. Cyclops skulde være et normalt Stadium af en *Rhombus maximus*, idet man jo ikke vidste, hvor stor denne Art blev, inden den forlod det Stadium, hvorpaa hin Sletthvarre-Unge befandt sig, da gaar han for vidt, og jeg kan berolige hans Tvivl med at anføre, at jeg har sét fuldtformede Pighvarrer af en ringere Størrelse, og med at henvise Dr. Malms kyndige Øie til den Høide eller Bredde, «Cyclophen» allerede har (Tab. III, Fig. 12).

VI.

I de foregaaende Afsnit har jeg givet et Overblik over de siden min første Afhandling udkomne Arbejder over Flynderformens Fremkomst og dertil knyttet de Bemærkninger, som

Forfatternes forskjellige Behandlingsmaader af Emnet fornemlig syntes mig at maatte fremkalde*). I dette Afsnit gaar jeg derimod over til et Tillæg til mine egne tidligere lagttagelser, det ved Figurerne paa Tavle I nærmere oplyste nye Bidrag til Kundskab om Øiets Gjennemgang igjennem Hovedet hos de vandklare, smaa Flyndre fra Atlanterhavet, som jeg indtil videre havde kaldt «plagusia»-agtige, en Benævnelse jeg ogsaa i denne Afhandling har midlertidigen ladet dem beholde**).

*) Dr. Kleins Afhandling er rigtignok kun leilighedsvis bleven omtalt i disse Bemærkninger, navnlig ved det Par Punkter, til hvis Oplysning den syntes mig at levere Data, der støttede sig til egne lagttagelser, og derfor ikke for Videnskabens Skyld burde forbigaaes. — Men at jeg iøvrigt saa lidet har omtalt, hvad han paa andre Steder anfører, har sin Grund i den utilgivelige Ringeagt og Usømmelighed, hvormed han behandler Forgængeres Arbejder, idet han undlader at gjøre sig bekendt med dem og dog kritiserer dem; han synes ikke at kjende nogen af de her omhandlede Afhandlinger i Originalen eller have sét de dem ledsagende Figurer; kun en enkelt (Schiødtes) synes han at have havt i en udførlig Oversættelse; af min har han hverken kjendt mit eget Uddrag i Annales des Sciences eller det af Wyville Thomson i Annals and Mag. of Natur. Hist. givne, og heller ikke sammes Bemærkninger dertil; og da han ikke heller kjender Figurerne, der ledsage disse saa almindelig udbredte Tidsskrifters Uddrag, tillægger han snart den ene, snart den anden af Forfatterne i Emnet latterlige Feiltagelser og Forsømmelser baade i Undersøgelser og lagttagelser. Han lader Van Beneden fortsætte vore Undersøgelser over Flyndrene, istedetfor at han i 1853 begyndte den hele Række af dem! o. s. v.

***) Med denne Benævnelse har jeg dog ikke villet betegne, at disse vandklare Flyndre have: «en habitus, i aldra højsta grad påminnande om dessa pleuronektoider» (Plagusierne), hvilken Vildfarelse hos Malm S. 4 og 26 har sin Grund i, at denne Forfatter ikke har kjendt den af Kaup opstillede Familie af Plagusier, men opfatter Plagusierne efter den ældre Cuvierske Sammenstilling med *Achirus*, *Monochir*, *Solea* og fl. a. Tvertimod, deres Omrids og hele Habitus stemmer saa nøie overens med visse Hvarreformers, f. Ex. *Zeugopterus punctatus* og lign., at man efter Habitus uundgaelig maatte stille dem sammen med saadanne Hvarrer; men det var i visse Karakterer at de mindede mere om Plagusierne: i den overordenlig ringe Uddannelse af Erystfinnerne hos Individet af indtil en Tommes Størrelse, der kunde gjøre det tvivlsomt, om i det Hele disse Finner vare bestemte til at vedblive;

Af slige vandklare, flynderformede Skikkelser havde jeg i min tidligere Afhandling fra 1864 nærmere omtalt og aftegnet tre Stadier med Hensyn til Øiestillingen. Figurerne paa den dertil hørende Tavle gjengav dem alle tre i naturlig Størrelse, sete fra høire og venstre Side (Fig. 1, 2, 3 *a, b*), og desuden Forparten fra Snudespidsen indtil Brystfinnerne af dem alle tre, i tredobbelt Forstørrelse, men ligeledes fra begge Sider (Fig. 1, 2, 3 *A, B*). De tre Stadier, om de end i Øiestillingen vare meget forskellige, vare dog indbyrdes lige store, omtrent en Tomme lange, saa at ingen ret kjendelig Tiltagen i Væxt kunde være foregaaet fra det ene ved Øiestillingen betegnede Stadium til det andet.

Det første af disse Stadier (Fig. 1 *a, b* og *A, B*), modsvarende den Flynderform, som Prof. Schiødte i sin Afhandling havde tillagt Navnet *Bascanius tædifer*, havde sine Øine siddende paa de to Sider af den tilsyneladende symmetriske Fisks Hoved, dog ikke fuldkommen lige overfor hinanden, idet Øiet paa den høire Side sad lidt nærmere ved Hovedets Overkant end det venstre. En stik Modsætning til dette første Stadium dannede det tredje (Fig. 3 *a, b, A, B*), der med samme almindelige Udseende havde begge Øinene paa én og samme Side af Hovedet, den venstre, og intet Øie paa Hovedets høire Side. Det viste sig saaledes med fuldstændigt Flynder-Udseende, enten man nu vilde henføre denne venstrevendte Flynder til Hvarrerne (*Rhombi*) eller til Hvarretungerne (*Plagusia*, Kaup). Midt imellem disse to Modsætninger i Øiestillingen

i det øvre Øies Stilling til det nedre; i Mundens allerede store Skjævhed, og lign.

Forresten er der, som jeg gjentagne Gange har anført, meget forskellige Flyndergrupper repræsenterede ved vore vandklare, mere symmetriske Smaafisk fra Atlanterhavet, og naar man bliver nøiere bekendt med Enkelthederne i vore Flyndergrupperes Bygning, vil man ogsaa nok kunne føre disse symmetriske Former til deres respective Slægter; det kan gjerne være, at min i tre Stadier aftegnede Form bliver et eller andet Led af *Rhombus*-Familien.

stod nu den, som det andet Stadium havde (Fig. 2 *a, b, A, B*). Det venstre Øie indtog den samme Stilling, som hos første og tredie, men det høire Øie, som sad høiere oppe paa Hovedets Side end hos første Stadium, var endnu forsaauidt paa den høire Side, som den større Del af Øiet endnu var synlig fra denne Side, men dets øverste Halvdel stak skraat ind igjennem Hovedet, ikke alene nedenfor Finnen, men nedenfor Straalestøtternes Grund og kom med sin allerøverste Rand frem paa den venstre Side af den tynde Fisks Hoved. Fisken sét fra venstre Side syntes derfor paa denne at have halvandet Øie; sét mere forfra, saa at ogsaa den større Del af høire Øie blev synligt, at have halvtredie*). Denne det høire Øies Stilling paa skraat igjennem Hovedet, som et Overgangstrin fra Øiestillingen hos første Stadium til den hos den fulde Flynderform eller tredie Stadium, blev yderligere stemplet som et normalt

*) Tilsvarende Udtryk brugte jeg ogsaa i det foran (S. 179) anførte Uddrag af mine Undersøgelser, som er optaget i *Annales des Sciences Naturelles* f. 1864, Zoologie, p. 253—58, Pl. 19 B, Fig. 1—11, og som gjengiver mit Brev herom til Hr. Prof. H. Milne-Edwards af 11te Juni 1864. Paa Pl. 19 findes Kopier af mine Figurer af Kranierne af Torskens (*Gadus*), Rødspætten (*Platessa*) og Pighvarren (*Rhombus*), af de forstørrede Figurer af de vandklare Flyndre i de tre Stadier og fra begge Sider, og endelig af Figuren i naturlig Størrelse af hint mellemste Stadium med tilsyneladende halvtredie Øie, hvorom det i Brevet hedder p. 256: «J'ai, entre autres, un individu qui semble avoir trois yeux, deux du côté gauche et un du côté droit; mais ce dernier est en réalité le même œil que le supérieur du côté opposé, bioculaire. Il est placé en travers de la tête même etc. etc.» — Fra *Ann. des Sciences Naturelles* er det igjen, at Dr. Traquair har forplantet denne Udtryksmaade, som jeg aldeles vedkjender mig, over i andre Kredse og saaledes l. c. S. 289: «but the one which seems most fully to justify his views is one, where the animal seems to have three eyes, the eye of one side projecting also through a little fissure above that of the other side, which side becomes thus binocular. This appearance is so striking, that one might readily be excused in thinking with M. Steenstrup: «Can we imagine a more striking demonstration of the passage of the eye across the head, than an eye arrested in this position?» etc. Hertil svare ogsaa Udtrykkene i de forannævnte *Proceed. of the Royal Soc. of Edinburgh*. Vol. III. S. 220.

Uddannelsestrin ved nøiere Undersøgelse af Individet i første Stadium. Dette, der havde et Øie paa hver Side af Hovedet, men det høire Øie allerede lidt høiere oppe end det venstre, viste nemlig ovenover det venstre Øie, men, kjendeligt, et Stykke nedenfor Finnegrunden, og just paa det Sted, hvor hint andet Stadiums høire Øie stikker frem, en kort, skarp Indfoldning, omgiven med lidt svulmende Rande, hvilken knaphullignende Fure (sé den anførte Tavles Fig. 1 A) tydelig angiver det Punkt, hvor det høire Øie, som øvre Øie paa den fuldt udviklede Flynderform, vilde komme frem.

Netop et saadant lærerigt Mellemstadium er det, der siden den Tid paany er kommen i Museets Besiddelse tilligemed enkelte andre Individer, der have ét Øie paa hver Side af Hovedet og saaledes nærmest svare til første Stadium. Ved disse sidste kunne idetmindste mine tidligere meddelte Data til Kundskab om vandklare Flyndres Udbredelse i Atlanterhavet blive noget forøgede, men denne Udvidelse af vor Kundskab herom viser sig nu som aldeles forsvindende imod den, vi i foreløbige Skildringer fra den store engelske Challenger-Expeditions Reisende, navnlig fra dennes Chef Sir Wyv. Thomsen og fra afdøde Dr. Willemoes-Suhm, allerede have modtaget, end-sige imod den, vi inden lang Tid kunne vente os, naar det hele Fiske-Materiale fra Expeditionen er blevet bearbejdet. Derfor anseer jeg det neppe Umagen værd her at optegne de enkelte Punkter i Atlanterhavet, hvorfra disse vandklare Flyndre ere blevne mig bekjendte siden 1863, og saa meget mindre Grund er der dertil, som den nævnte engelske Expedition jo har truffet saadanne Former ogsaa i det indiske Hav og Sydhavet, og vi følgelig vide, at vi staa lige overfor et almindeligere og udbredt Formforhold hos Flynderfamilien, og, efter hvad jeg fra mine Individer tør slutte, rimeligvis hos meget forskellige Grupper af denne (smlgn. min første Afhandl. S. 163). Derimod synes den engelske Expedition ikke at have truffet paa saadanne Overgangstrin i Øiestillingen som vore, uagtet idetmindste begge de

nævnte Zoologer, som det var at vente, sees i høi Grad at have havt deres Opmærksomhed henvendt paa dem. Men det maa indrømmes, at visse Mellemtin hos saa vandklare Skikkelser let maatte kunne oversees under den ofte store Il med at faae den indsamlede Rigdom foreløbig undersøgt, og at et nøiere Eftersyn af det saa vel bevarede Materiale endnu kan paavise saadanne. Indtil da maa jeg saa meget mere paaskjønne det Held, at det blev forundt mig ved en dansk Skibsførers ufortrødne Bestræbelser ogsaa anden Gang at forelægge Videnskaben et saa udmærket Exempel paa dette Mellemtin, som det, vor Tavle I fremstiller.

Alle 5 Figurer paa denne Tavle fremstille et og samme Individ, fanget i Slæbenet af Hr. Skibsfører A. F. Andréa, R. af Dbg., under $24^{\circ} 16'$ N. B. og $80^{\circ} 40'$ V. L., altsaa lige ovre ved den nordamerikanske Kyst, i Aaret 1870. Individet er af samme Størrelse som mine tidligere afbildede, næsten 1 Tomme eller nøiagtigere 25 Mm. langt, 14 Mm. høit, med en meget glat Hud paa begge Sider. I Rygfinnen har det 86 eller 85 Straaler, i Gadfinnen 61 (efter flere Tællinger), og i Halefinnen 16. I Figurerne 1 og 2 er det gjengivet i naturlig Størrelse, Fig. 1 fra høire og Fig. 2 fra venstre Side; i Figurerne 4 og 5 gjengives Forparten af Dyret, fem Gange forstørret, Fig. 4 fra høire og Fig. 5 fra venstre Side, og i Figur 3 endeligen sees Individet forfra, dog lidt paa skraat, i tre Ganges Forstørrelse. Disse med usædvanlig Dygtighed og Troskab af Hr. C. Cordts baade tegnede og litograferede Figurer ville ved en nøiere Betragtning vise, at den ved første Øiekast tilsyneladende symmetriske Fisk dog allerede røbede sin Asymmetri i Kropsidernes ulige Uddannelse, f. Ex. ved den større Fladhed paa høire Side, den tydeligere Hvælvedhed paa venstre Side, fremdeles ved den noget ulige Retning af Grændselinierne mellem Afsnittene af de store Sidemuskelpartier, og for Hovedets Vedkommende ved den ulige Udvikling af Gjællehulens ydre Vægge og af Mundens to Sidehælfter, samt i Rygfinnens Høide og Gang, sét fra de

to Sider. Ogsaa de meget smaa Brystfinner, der i det Hele mindede om mine tidligere Individets (sé Overs. f. 1863, Figg. *A, B, C*), vare lidt større paa venstre end paa høire Side. De vare saa ubetydelige og paa Grund af deres svage Bygning saa utydelige, at jeg under den Forstørrelse, hvori Figurerne tegnedes, ikke dengang kunde lade dem træde tydelig frem fra Kroppens Sider, uden at forstyrre Fiskens Habitus. Ved Tegnet + er imidlertid deres Plads angivet paa Figurerne 4 og 5. — Nu, da Dyret har været saa længe opbevaret i Spiritus og de vandagtige Vædske ere blevne saa stærkt uddragne af det, ere de naturligvis tydeligere.

Hvad Individet og de derefter omhyggelig udførte Figurer paa ny bekræfte som Kjendsgjæringer, er følgende Punkter:

Den senere Blindsides Øie kommer over paa Øiesiden ved at sænke sig skraat ind igjennem Hovedet og komme frem igjen paa den modsatte Side, saaledes som jeg tidligere har fremstillet det og som Sir Wyville Thomson ogsaa efter mine tidligere Individet, hvilke han her i Museet havde taget i nærmere Betragtning, stadfæstede det (sé hans Udtryk herom foran S. 179 Anm.).

Under sin Flytning fra den ene Side til den anden, vender dette Øie sin Pupille eller Forflade skelende opad og indad, dreierende sig om sin horizontale Axe næsten indtil 90° , en Vinkel, som senere endog maa naa indtil 180° , inden Øiet kommer i sin rette og blivende Stilling paa den anden Side.

Øiets Vandringsvei ligger ingenlunde, som Prof. Wyv. Thomson snarest vilde formode det, imellem Rygfinnens Rod og Hovedets eller Kraniets Overflade, men dybere nede, saa at Finneroden og dens Muskler ikke i mindste Maade forstyrres ved Indsænkningen og Gjennemgangen, hvilket allerede en nøiere Undersøgelse af Indbøiningen under Rygfinnen paa Blindsiden viser, men som endnu tyde-

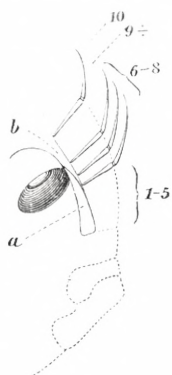
ligere fremgaar af Forholdene paa Øiesiden, thi Øiet bryder frem i en kjendelig Afstand fra Finneroden, i Feltet nedenunder denne, og netop hvor hin knaphulformede Fure hos det første Stadium fandtes, der antyder den senere Hudvold om Øiet. Jeg bør tilføie, at ogsaa mine tidligere Individider og Figurerne af disse (smlgn. Overs. 1863, Tavlen Figg. 1 A, 2 A, 3 A) vise dette tilfredsstillende og tydeligt, og at jeg kun kan forklare mig Prof. Wyv. Thomsons senere udtalte Tvivl og Formodning derved, at det fra selve Dyrene modtagne Indtryk af Enkelthederne har været noget udvisket, inden han nedskrev sit Referat til *Annals and Mag. of Nat. History*.

Dyret og Figurerne vise lige saa bestemt det Uholdbare i Malms og Traquairs Fortrøstning, at saafremt Øiet virkelig hos disse Former baner sig Vei igjennem Hovedet ud paa den anden Side, da vil det nok vise sig, at Øiet vandrer igjennem en Aabning eller Spalte, som er dannet derved, at Rygfinnen har strakt sig fremad tidligere end Øiets Gjennemgang, og efterladt en Aabning, hvorigjennem Øiet kunde ligesom smutte under Rygfinnen*). Finnens Grundnaar i Virkeligheden paa ingen af Siderne ned til den «Tunnel», hvori Øiet baner sig Vei. Denne hele Opfattelse af Finnens Fremrykken paa Hovedet, som om den fra Isse og Pande skjød sig frem over paa Forhovedet, omtrent som en Landgangsbro skydes ud fra et Dampskib til Kaien, er saare vanskelig at forstaa for Zoologer.

*) Malm, lib. c. S. 26—27. Traquair, *Proceed.* S. 221. Paa sidstnævnte Sted hedder det: «M. Steenstrup's specimens may possibly be malformations of a nature essentially similar to those already referred to, but in which the dorsal fin may have actually bridged over the upper eye. Or there may be some groups of Pleuronectidæ, in which the upper eye in the normal course of development may become bridged over by the advancing dorsal fin, a slit being left, through which afterwards the upper eye passes to its position on the binocular side of the fish.»

Finneroden, understøttet af Straalebærerne (interspinalia), staar paa en fastere Stræng eller Bjælke, der danner en Forbindelse fra Hjernebassen til Forpandepartiet, og under denne og Forpandebuskken, og ikke umiddelbart under Finneroden, passerer Øiet, saaledes som jeg tidligere har fremstillet det og som nedenstaaende Skitse, efter et Præparat af et tredje Individ paa et lidt mere fremrykket Gjennemgangsstadium, antyder det.

(Figuren i 5 Ganges Forstørrelse.)



a brusket frontale anterius.

b mere membranøst, dog temmelig fast Grundlag for frontale proprium, hvilket allerede paa sin modsatte Side havde udhulet sig til Orbita.

Straalerne 1—5 og 9 bortpræparerede tilligemed deres Stotter (interspinalia).

Infraorbitalbuen, om den end ligesom de andre Grene af Sidelinesystemet endnu kun er svagt og utydeligt udviklet, kan dog erkjendes i en Linie udenom Øiet.

Endelig nedlægge Dyret og Figurerne en bestemt Indsigelse imod Professor Schiødtes Tolkning af disse Flyndre og hans ubeføiede Insinuationer om Maaden, hvorpaa jeg har iagttaget og undersøgt dem. Professoren sér i sin *Bascanius**, der modsvarer det første Trin af mine tre aftegnede Stadier, en vandklar Flynder-

*) Det græske Navn, Professoren har tillagt dette efter hans Mening omtrent udvoxne Dyr, betyder: Æreskjænderen, Bagvaskeren.

form, som er skabt til at leve i de høiere Regioner af Vandet og ikke at faae de to Øine paa samme Side af Hovedet; han tildeleer den altsaa et Opholdssted og en Levevis, der i Andres Øine kun kan synes lidet hensigtsmæssig for en Skabning, om hvilken han selv siger, hvad ogsaa hans Figurer noksom bekræfte, at den venstre Kroppside allerede da var mere fyldig end den høire, hvis venstre Brystfinne var kjendelig større og kraftigere end den høire, hvis høire Øie sad høiere oppe paa Hovedets Side end det venstre, og om hvilken jeg efter mine Exemplarer af saadanne Dyr tør tilføie, hvis Kjæber ogsaa allerede var kjendelig ulige paa de to Sider af Hovedet. Denne Forfatterens Anskuelse deler jeg rigtignok ikke, men jeg skal ikke gaa i Rette med ham herom; naar den virkelig svarer til de Forordringer, han stiller til Overensstemmelse mellem Bygning og biologiske Forhold, bliver det hans Sag selv at forsvare den imod eventuelle Angreb, om han kan det. Men naar Professor Schiødte giver følgende Afslutning paa sin Fremstilling af den ovennævnte *Bascanius tædifer**) og dermed paa sin Afhandling:

«Mellem høire Sides Øie og Rygfinnen er et halvmaanedannet, indtrykket Sted (som dog paa Figuren er bleven lidt for stærkt fremhævet), hvor Kroppen bliver saa tynd, at den ved ringe Berøring gaaer itu eller skiller sig fra Rygfinnen. I saa Tilfælde sees naturligiis en Deel af det modstaaende Øie igjennem Hullet, hvorved der da for en overfladisk Betragtning frembyder sig det besynderlige Syn af en Flynder med halvtredie Øie» (S. 275),

da maa jeg vise Professoren tilbage indenfor Sandhedens og Sømmelighedens Grændser, som han her overskrider.

Thi Sandheden er, at ingen af mine mange, til hans *Bascanius* svarende vandklare flynderagtige Fisk ere gaaede itu, og Prof. Schiødtes tvende Stykker vare jo heller ikke gaaede itu

*) Artsnavnet *tædifer* betyder Fakkeltænder, Lysbringer; hvad det egentlig er denne Art har kastet Lys over, vil Tiden vel vise.

eller havde paa det nævnte Sted Kroppen skilt fra Rygfinnen, og naar dette slet ikke havde fundet Sted, saa var det jo endnu mindre skét «ved en ringe Berøring». Til at forudsætte en saadan Bristning, maa der ganske vist være en stor Tyndhed, men denne findes ikke hos Flyndrene. Sandheden er jo ogsaa fremdeles, at selv om en Bristning indtraadte paa det nævnte Sted, da vilde man «naturligvis» **ikke** kunne «see en Del af det modstaaende Øie igjennem Hullet», fordi det vilde være en Umulighed. Det modstaaende Øie, hvoraf en Del skulde sees igjennem Hullet, er jo det venstre, og dette ligger, som Forfatteren rigtigen angiver og abilder, lavere nede paa Hovedets Side end det høire, men det tynde Sted, der skulde briste og danne Hullet, ligger jo ovenover dette, høiere-liggende Øie, imellem dette og Rygfinnen! Ligesaa usandt er det sidste Led i hans Paastand, at der da — naar den supponerede men ikke-stedfindende Bristning fandt Sted — vilde frembyde sig «for en overfladisk Betragtning det besynderlige Syn af en Flynder med halvtredie Øie»; thi saa forkerte Erfaringen end viser at Øinene kunne staae i Hovedet paa Mennesker, saa er det dog fysisk umuligt for noget Menneske at stille dem saaledes, at de her selv med den største Anstrængelse kunde faae et Billede af halvtredie Øie — endnu mindre kunne de altsaa faae dette «besynderlige Syn» «ved en overfladisk Betragtning». — Den hele Bascaniade*) skal maaske ikke sige andet, end at dens Forfatter her offentlig «hverrer Syn»; men er den alvorlig ment, illustrerer den i hvert Tilfælde en vis nyere Forsknings «Undersøgelseskunst».

*) Et Sidestykke hertil er Forfatterens anden Udtalelse om Flynderøiet og dets Vandring, knyttet til en Berigtigelse af en Misforstaaelse hos Dr. Traquair.

Det er med Rette, at Professor Schiødte her har berigtiget Dr. Traquairs Opfattelse, at Ichthyotomen Dr. Rosenthal i sit store Atlas over Fiskenes Skeletbygning skulde have udtalt en lignende Anskuelse om Øiets Vandring fra den ene Side af Hovedet til den anden, som den, jeg havde fremsat, og det er vist ikke ved nogen egenlig

VII.

Slutnings-Tillæg til det Foregaaende

(meddelt i det Kgl. D. Videnskabernes Selskab den 21de December 1876).

I Begyndelsen af November 1876 modtog jeg ganske uventet i et Brev fra Professor Dr. Alexander Agassiz i Newhaven kort Meddelelse om høist interessante iagttagelser, han havde anstillet over Øieflytningen hos Unger af flere Arter af Flyndre ved den nordamerikanske Kyst; hos en af disse havde han iagttaget, at Øiet virkelig gaar skraat igjennem Hovedet ud paa den anden Side, og ved en Pennetegning i Brevet havde han været saa venlig at skitsere Øiets Gang under denne Vandring. Kort Tid efter sendte han en trykt, kun foreløbig Beretning om Resultatet af sine iagttagelser, der have en saa meget større Interesse, som Forfatteren har været heldig nok til at kunne

Uklarhed i Rosenthals Udtryk, men kun ved en urigtig Opfattelse af den Tids gængse Talebrug, at Misforstaaelsen er opstaaet, en Misforstaaelse, som fra Dr. Traquair har forplantet sig til Prof. Tröschel (Jahresberichte) og derfra videre.

Men det er i alt Fald Sandhed med utilbørlig Modification, naar Prof. Schiødte slutter sin Anmærkning herom saaledes:

•At et høist sammensat Organ, efter at være fuldt udviklet, skiller sig fra den Bund, hvori det er fremvoxet, vandrer omkring i Organer, der tilhører ganske andre Væv, ja gaaer tværs igjennem Dyrets Krop og kommer uforandret ud paa den anden Side for her paa ny at slaae Rod — er en Tanke, den videnskabelige Zoologi nu tildags kan lægge tilside som en Curiositet. Men en sliq Anskuelse bør end ikke, uden mere tvingende Grunde, tilskrives en ældre, saa duelig Anatom, som Rosenthal, skjøndt han udgav sin Tavle saa langt tilbage i Tiden, som 1821, altsaa kun kort efter at Bichat havde grundlagt den almindelige Anatomie.»

En Opfattelse af Øievandringen hos Flyndrene i den Form og den Iklædning, i hvilke Prof. Schiødte her fremsætter den, eller nogetsomhelst der kommer denne Opfattelse nær, vil man ikke kunne paavise i den zoologiske og anatomiske Litteratur, uden netop her hos Prof. Schiødte og i Oversættelsen af hans Artikel i fremmede Tidsskrifter (f. Ex. Annals and Mag. of Nat. History, 1868, p. 381). Ham alene tilkommer Æren for denne Opfindelse og saa meget større Uret imod ham er det derfor, at Dr. Klein har tilvendt Traquair denne •Curiositet».

følge den efterhaanden indtrædende Forandring i Øiestillingen hos samme Individ i Dyrets levende Live.

Af denne foreløbige Meddelelse fremgaar det, at af ikke færre end sex Arter have Ungerne været Gjenstand for hans Iagttagelser; at hos de fire Arter af disse Unger naaede Rygfinnen ikke fremad til den bagerste Rand af det Øie, der kom fra den senere Blindside og dreiede over paa Øiesiden; at hos en femte Art derimod Rygfinnen efterhaanden rykkede frem endog forbi Øiets Forrand, og at saaledes her den unge Flynder snart viste et Stadium, i hvilket Øiet fra Blindsiden syntes at have passeret igjennem Hovedet mellem Pandebenet og den forreste Del af Rygfinnen, men, da Iagttageren havde paa levende Individer fulgt den hele Gang, vidste han — dette er hans Ord — at Flytningen af det høire Øie alligevel her var skét paa den selvsamme Maade, som hos de foregaaende Arter. I det Væsenlige havde altsaa disse fem Arter ikke frembudt ham andre Fænomener, end saadanne, der kunde synes at bekræfte Malms og Andres tidligere Forklaring af de voxne Flynderformers Fremkomst fornemlig ved Dreining (Torsion) af en Del af Hovedet og ved Rygfinnens senere Fremadrykning. Men til hans største Overtaskelse viste nu den sjette Art, — hvis vandklare symmetriske Unger havde Rygfinnen naaende næsten til Snuden, som hos mine «*plagusia*-agtige» og Prof. Schiødtes *Bascanius*, samt derhos vare allerede saa store, at Agassiz ogsaa en Stund dvælede ved den Tanke, at de maaske igjennem hele Livet vilde beholde den samme Form, — en hel anden Fremgangsmaade i Øiets Flytning, idet det høire Øie sænkede sig dybere og dybere ind i Hovedet, bevægende sig samtidig opad og noget fremad, og efter Forløbet af meget faa Dage gik ud paa den modsatte Side af Hovedet. Her giver altsaa Iagttagelsen en Flytning af Øiet, som den jeg har skildret og afbildet; kun Tydningen afviger deri, at Øiet siges at gaa under Rygfinnens Rod, mellem denne og Pandebenet. — De Træk, som Prof. Agassiz i sin korte Beretning har givet om den femte og

sjette Art, ere imidlertid altfor vigtige til ikke at blive meddelte her *in extenso*:

«In another species, after the eye had thus by the same process of translation and of torsion been brought from the one side to the other, the dorsal fin gradually extended beyond the anterior edge of the orbit of this eye. This young flounder thus soon presented a stage in which the eye from the blind side appeared to have passed through the head between the frontal bone and the base of the anterior rays of the dorsal fin. As I had, however, followed the whole development in living specimens, I knew from actual observation that the mode of transfer of the right eye had been identical with that of the preceding species. These observations thus far confirm in the main Malm's explanation of the development of young symmetrical flounders into the well-known older stages. To my great astonishment, therefore, I captured one day a number of flounders (about an inch in length) closely allied to the *Plagusia* of Steenstrup, the so-called *Bascania* of Schiödte; they were so perfectly transparent that they seemed the merest film on the bottom of the glass vessel in which they were kept. They were still entirely symmetrical, the eyes well removed from the snout, with a dorsal fin extending almost to the nostril, far in advance of the anterior edge of the orbits of the eyes. They were of course at once set down (from their size) as belonging to a species of flounder in which the eyes probably remained always symmetrical, and I prepared to watch its future development. It was therefore with considerable interest that I noticed, after a few days, that one eye, the right, moved its place somewhat towards the upper part of the body, so that when the young fish was laid on its side, the upper half of the right eye could be plainly seen, through the perfectly transparent body, to project above the left eye. The right eye (as is the case with the eyes of all flounders), being capable of very extensive vertical movements, through an arc of nearly 180° , could thus readily turn to look through the body, above the left eye, and see what was passing on the left side, the right eye being of course useless on its own side as long as the fish lay on its side. I may mention here that this young flounder, until long after the right eye came out on the left side, continued frequently to swim vertically, and that for a considerable length of time. This slight upward tendency of the right eye was continued in connection with a motion of translation

towards the anterior part of the head till the eye, when seen through the body from the left side, was entirely clear of the left eye, and was thus placed somewhat in advance and above it, but still entirely in the rear of the base of the dorsal fin extending to the end of the snout. What was my astonishment on the following day, on turning over the young flounder on its left side, to find that the right eye had actually sunk into the tissues of the head, penetrating into the space between the base of the dorsal fin and the frontal bone, to such an extent that the tissues adjoining the orbit had slowly closed over a part of the eye, leaving only a small elliptical opening, smaller than the pupil, through which the right eye could look when the fish was swimming vertically. While the young flounder lay on its side, the right eye was constantly used in looking through the body, and could evidently see extremely well all that took place on the left side. On the following day the eye had pushed its way still farther through, so that a small opening now appeared opposite it, on the left side, through which the right eye could now see directly, the original opening on the right side being almost entirely closed. Soon after, this new opening on the left increased gradually in size, the right eye pushing its way more and more to the surface and finally looking outward on the left side with as much freedom as the eye originally on the left; the opening of the right side having permanently closed. I have thus in one and the same specimen been able to follow the passage of the eye from the right side to the left through the integuments of the head, between the base of the dorsal fin and the frontal bone.»

Hvad der af de foranstaaende Data, hentede fra lagttagelsesrækken paa levende Individuer af denne sidste Art, synes mig for Øieblikket især at burde fremhæves til Sammenligning med hvad jeg i det Foregaaende har meddelt om de tilsvarende Stadier af visse vandklare Flyndre, er følgende:

1) at Øiets fuldstændige Flytning fra den ene Side til den anden foregaar i et Tidsrum af ikkun meget faa Dage. Derved bliver det forklarligt, baade at de næsten symmetriske Unger og de i fuld Flynderskikkelse fremtrædende Individuer (sé mine Figurer i første Afhandling, sammenholdte med dem paa Tavlen i denne) have samme Størrelse (smlgn. S. 225), og at

der hidtil ikkun er kommen til Iagttagelse saa faa Individder af Gjennemgangsstadierne. Der maa jo høre et særeget Held til at træffe paa disse Former just i det Par Dage eller tre, da Gjennemgangen foregaar, og det er deraf forstaaeligt, at dette Held snarere faldt i saadanne Søfarendes Lod, som Hygoms, Andréas og Andres, der Aar efter Aar gjennemseilede til vexlende Aarstider de samme Strøg af Atlanterhavet, end i de S. 227 nævnte Naturforskeres paa «Challenger», hvilket Skib jo under Expeditionen kun i enkelte, om end større Linier gennemskar Oceanerne.

2) at Øiets Gjennemgang skér under en vis Veltning om dets horizontale Axe, en Skelen, hvilken imidlertid paa de levende Individder har vist sig i en meget større Styrke, end man efter Spiritus-Exemplarerne skulde formode, men som harmonerer vel med den overordenlige Bevægelighed, Øinene have hos de voxne Flyndre. At Øiet allerede under sin Vei igjennem Dyret har vendt sig, eller kan vende sig under en Vinkel af 180° , og allerede i denne Stilling igjennem sin egen klare Krop kan have det Synsfelt, som det senere faar efter fuldendt Vandring, er en overraskende Kjendsgjerning!

3) at i samme Grad, som Øiet sænker sig under Resorptionen dybere ind i Hovedet, dets forrige ydre Omgivelser snøre sig mere og mere sammen, og at tilsidst Aabningen lukkes, omtrent samtidig med at Øiet træder igjennem paa den modsatte Side, er en interessant Iagttagelse, der for mig har saa meget større Betydning, som jeg troede hos et af mine Flynder-Individer at sé Spor af Blindsidens Øieaabning, men frygtede for at noget Slid paa Dyrets Huddække der havde fundet Sted.

4) at i ét Punkt Agassiz mener ifølge Iagttagelserne at maatte afvige fra mig med Hensyn til disse Flyndre, nemlig deri, at Blindsidens Øie gaar under Basis af Rygfinnen og over Pandebenet, og ikke «under Pandebenet» (sé de tre sidste

Linier af det citerede Stykke og smlgn. dem med de nedestaaende Linier af det paafølgende Stykke hos Agassiz p. 3*). Uagtet der endnu ikke foreligger noget af de udførlige Meddelelser, vi fra Forfatteren kunne vente om hans interessante lagttagelsesrækker, maa det dog være tilladt strax at gjøre bestemte Indvendinger imod et Par Punkter, saaledes som de fremstilles af ham i al Korthed. — For det Første er der nok nogen Misforstaaelse deri, at jeg lader Øiet gaa «under the frontal bone»; jeg lader det kun gaa under den ydre Rand eller Side af Pandebenene op igjennem disse; med den øvrige Del af Pandebenene lader jeg derimod Øiet gjøre just den selvsamme Dreining, «torsion», som Prof. Agassiz angiver at det gjorde med hele «frontal bone». Overveier man dernæst Forfatterens træffende Udtryk om, hvorledes Øiet rask sænkede sig ind i Hovedet og skjød sig skraat opad i dette, bliver det for det Andet uforstaaeligt, hvorledes Øiet skulde kunne fra selve Pandebensranden af, det er: fra Randen af selve det dækkende Tag over sig, komme til at tage Pandebenene eller deres Anlæg med under denne Torsion, thi det maa, ifølge den beskrevne Bevægelse, have gaaet meget inderligere og have resorberet sig skraat op igjennem dem, og Udtrykkene «penetrating into the space between the dorsal fin and the frontal bone» eller som det senere hedder: «through the integuments of the head, between the base of the dorsal fin and the frontal bone» kunne

*) «This observation leads to somewhat different conclusions from those of Steenstrup, who thought he could prove (from an examination of alcoholic specimens) that the eye from the right side passed under the frontal bone. This is evidently not the case here, the eye passing round it, there being only a very slight torsion of the frontal in this young stage. Although at first glance this appears so radically a different method of transfer of the eye from the one described above, yet if the dorsal fin had not extended beyond the posterior edge of the right orbit the process would have been the same, as is readily seen. I hope soon to give full details, with illustrations, of the process of transfer of the eye in its different stages, in a paper I am preparing on the young stages of a few of our bony marine fishes.»

umuligt blive at tage efter Ordene. Der er jo her ingen «space», og paa dette første eller ydre Parti af sin Vei kunde Øiet ikke komme til at gaa imellem Pandebenet og Finnen uden ved at gaa den modsatte Retning, nemlig udad, for at komme over sin Orbitalrand og fra denne Side vælte det hele Pandeben over. Dette er klart nok af hvad der allerede foreligger, og jeg behøver i denne Henseende ikke yderligere at paaberaabe mig min foran S. 231 givne Skildring af det tilbagestaaende Grundlag, til hvilket Rygfinnen støtter sig, og vil heller ikke henholde mig til den oplysende Pennetegning, som Prof. Agassiz saa venlig indsatte i mit Brev, da nogen tilsvarende Figur ikke medfølger det trykte Uddrag. Det vil i alt Fald ikke være vanskeligt at forklare, om Anlæggene til Pandebenet og Forpandebenet ikke vare blevne iagttagne af Agassiz, hvis han indtil da kun havde anstillet Undersøgelser paa Individer, der vare saa vandklare, at de syntes kun at være «the merest film on the bottom of the glass vessel»; men hærtnede i Spiritussen ville de nok vise det sande Forhold.

5) at vi med Hensyn til det skuffende Fænomen ved Øiets Gjennemgang, hvilket Prof. Agassiz omtalte hos sin femte Art, i endnu større Grad føle os henviste til den forventede udførligere Beskrivelse, inden vi kunne slutte os til den Opfattelse af det Sete, som Forfatteren udtaler, er en Selvfølge. Men det Samme gjælder naturligvis ogsaa om Agassiz's Opfattelse af Iagttagelserne af de første fire Arter, om man end ikke har det allermindste at indvende imod selve disse, saaledes som de i de faa Udtryk ere gjengivne. Om Forfatteren virkelig kan faae Flynderhovedet frembragt alene ved Dreining, «Torsion», og ved Rygfinnens Fremrykning, vil vise sig af de Oplysninger, han kan give os om Kraniebygningen hos sine unge Flyndre, og navnlig om Dannelsen af den Længdebro udenfor det øvre Øie, af hvilken vi i de foregaaende Afsnit have sét saa mange forskellige Tolkninger. Men til disse Forhold har Prof. Agassiz ikke med et eneste Ord hentydet i dette foreløbige Uddrag; at

imidlertid en Naturforsker, som Prof. Agassiz, naar han senere leverer os den udførlige Fremstilling af sine Iagttagelser paa sit rige Materiale af forskjellige Former af Flynderunger, ikke vil undlade hos disse tillige at oplyse de Forhold, der alene kunne endelig afgjøre den typiske Flynderforms Fremkomst af den normale Fiskeform, og som nu i langt over et Decennium have dannet det egentlige Brændpunkt i Drøftelsen af dette Spørgsmaal — derom kunne vi vist være overbeviste.

Trykfeil.

Følgende Unøiagtigheder have undgaaet Opmærksomheden under Korrekturlæsningen og bedes rettede.

S. 177, L. 7 f. o. og L. 10 f. o.: «Edingburg» læs: «Edinburg». — Ligeledes S. 178, L. 17 f. o.

S. 177, L. 6 f. n.: «Württembergersche» læs: «Württembergische».

S. 178, L. 5 f. n.: «Edinbourgh» læs: «Edinburgh».

S. 179, L. 6 f. n.: «3688» læs: «p. 368».

S. 192, L. 12 f. n.: «, saa at» læs: «samt».

Forklaring af Tavlerne I—IV.

Tavle I.

Figurerne 1—5 gjengive et og samme Flynderindivid, fanget af Hr. Kapt. A. F. Andréa under $24^{\circ} 16'$ N. B. og $80^{\circ} 40'$ V. L. f. Gr. i Aaret 1870. Det er en af de saakaldte „*plagusia*“-agtige Flyndre, der bleve beskrevne i min første Afhandling om Flyndrenes Øjestilling i Vid. Selsk. Overs. f. 1863 og aftegnede paa den dertil hørende Tavle, og det modsvarer det mellemste af de tre der afbildede Stadier (Fig. 2 *a, b* og 2 *A, B*), karakteriseret ved, at den høire Sides Øie, Blindsidens, er ifærd med at bryde tværs op igjennem Hovedet og allerede med sin øvre Kant er kommen frem paa Øiesiden som øvre Øie.

- Fig. 1. Dyret i naturlig Størrelse, sét fra høire Side.
 — 2. Samme i nat. Størr., sét fra venstre Side.
 — 3. Samme i 3-dobbelt Størrelse, sét forfra og lidt paa skraat.
 — 4. Sannes Forpart, 5 Gange forstørret, sét fra høire Side.
 — 5. Samme Del, 5 Gange forstørret, sét fra venstre Side.

Paa Figurerne 4 og 5 angiver Tegnet \times Brystfinnernes Plads.

Tavle II.

Alle Figurerne oplyse Kraniebygningen hos Flynderfamilien i Modsætning til den hos regulære Benfisk; de ere Træsnitsfigurer, der med Undtagelse af Fig. 7^b ere laante fra den første Afhandlings Text (Vid. Selsk. Overs. 1863), men her til lettere Sammenligning stillede ved Siden af hinanden som Tavle.

- Fig. 6. Kraniet af en almindelig Torsk (*Gadus callarias*).
 — 7. Kraniet af en Rødspætte (*Pleuronectes platessa*).
 — 7'. Venstre Rand af samme Kranium med Kjæden af den venstre Infraorbitalbues Smaaknokler (*io*).
 — 8. Kraniet af en Pighvarre (*Rhombus maximus*).
 — 9. Kraniet af en Argushvarre (*Rhomboidichthys longimanus*), sét fra venstre Side.
 — 10. Samme Kranium, sét ovenfra.

Bogstaverne have paa alle Figurerne samme Betydning:

- f og f' = frontalia propria, dextra et sinistra.
 a og a' = frontalia anteriora, dextr. et sin.
 p og p' = frontalia posteriora, dextr. et sin.
 v = vomer.
 e = ethmoideum.
 c = crista occipitalis.
 o og o' = betegne Pladsen (Orbita og Orbitalranden) for høire og venstre Øie.

Tegnet \div antyder Pladsen, hvorfra Blindsidens Øie er veget.

Pilen betegner den omtrentlige Retning, hvori Øiet under Flytningen er gaet.

Tavle III.

Figurerne tjene til at oplyse Forholdet imellem visse hyppige Former af Misdannelse blandt Flyndrene og unge og gamle Flyndre i deres normale Skikkelse.

Ogsaa denne Tavle er sammenstillet af Træsnitsfigurer, laante fra første Afhandling (Vid. Selsk. Oversigt for 1863, S. 27, 29).

- Fig. 11. Unge af Slethvarre (*Rhombus barbatus*), efter Malm (Kgl. Sv. Vetenskaps-Akademiens Öfversigter f. 1854).
 — 12. *Pleuronectes cyclops* Donovan, $1\frac{3}{8}$ Tomme lang = *Rhombus maximus*, meget ung (Donovan, Nat. Hist. of British Fishes, vol. IV, pl. 90).
 — 13. En misdannet Slethvarre, •Malformed Brill• hos Yarrell (Brit. Fishes, 3 Edit., p. 643).
 — 14. En normal Slethvarre (*Rhombus barbatus*).

Tavle IV.

Figurerne 1—3 fremstille det karakteristiske Løb af Sideliniens Grene hos Flynderfiskene i Modsætning til disses Løb hos de normale Benfisk (smlgn. Texten S. 193—96).

- Fig. 1. Et Flynderhoved (*Platessa fesus*), seet fra Øiesiden (høire Side).
 — 2. Samme, seet fra Blindsiden (venstre Side).
 — 3. Et Torskehoved (*Gadus callarias*), seet fra høire Side.

Bogstaverne have i alle tre Figurer samme Betydning:

- a forreste Ende af den egentlige Sidelinie (Linea lateralis);
 b dens mere umiddelbare Fortsættelse, Stamme-, Pande- eller Frontal-grenen;
 c Tindingegrenen, Supratemporalgrenen;
 d Forgjællelaagsgrenen, Præoperculargrenen;
 e Infraorbitalgrenen.

Paa de to Flynderhoveder Fig. 1 og 2 betyder Tegnet \div et Felt, hvori de normale Fisk have et Øie, men hvorfra dette er forsvundet hos Flyndrene (smlgn. det samme Tegn paa Tavle II, Fig. 7, 8, 9, 10, og for de omgivende Skeletdeles Vedkommende Tab. II, Fig. 7^b).

Tegnet $+$ derimod betegner hos Flynderen et Felt, i hvilket et Øie er flyttet ind, og hvori der aldrig findes et Øie hos de normale Benfisk.

Fig. 4—7 fremstille i Forstørrelse en spød Unge af en Tunge (*Solea*); de ere Kopier efter Dr. Malm's sidste Afhandling, i Kgl. Vetensk. Acad. Handlingar, Bd. VII, Nr. 4, og tjene til at oplyse det forskjellige Fysionomi, det samme Individ paa et og samme Stadium kan frembyde for Iagttageren, og den forskjellige Tydning man uvilkaarligen maa komme til at give et saadant Udviklingstrin, eftersom man sér dets Finneparti og Øieregion i den frie eller den sammentrukne og nedtrukne Stilling.

- Fig. 4. En lille, kun 12 Mm. lang Unge af en Tunge (*Solea*), i fuld Krop-omrids fra Øiesiden; her for Pladsens Skyld fotografisk reduceret til c. $\frac{1}{2}$ af den Størrelse, hvori Dr. M. har fremstillet den (Tafl. 2, Fig. 11) og hvori min næste Figur fremstiller Hovedet.
- 5. Hovedet af samme, i den Størrelse Dr. Malm med den største Omhu og Troskab har tegnet det efter det endnu levende Dyr (Tafl. 2, Fig. 11).
 - 6 og 7. Hovedet af samme Unge og med samme Forstørrelse, fra Øie- og Blindsiden, tegnet 2 Dage senere efter det samme Individ, der umiddelbart efter den første Tegning var kastet i svag Spiritus (Malm: Fig. 11 b og 11 c; hermed sammenlign man Fig. 11 paa vor foranstaaende Tab. III).

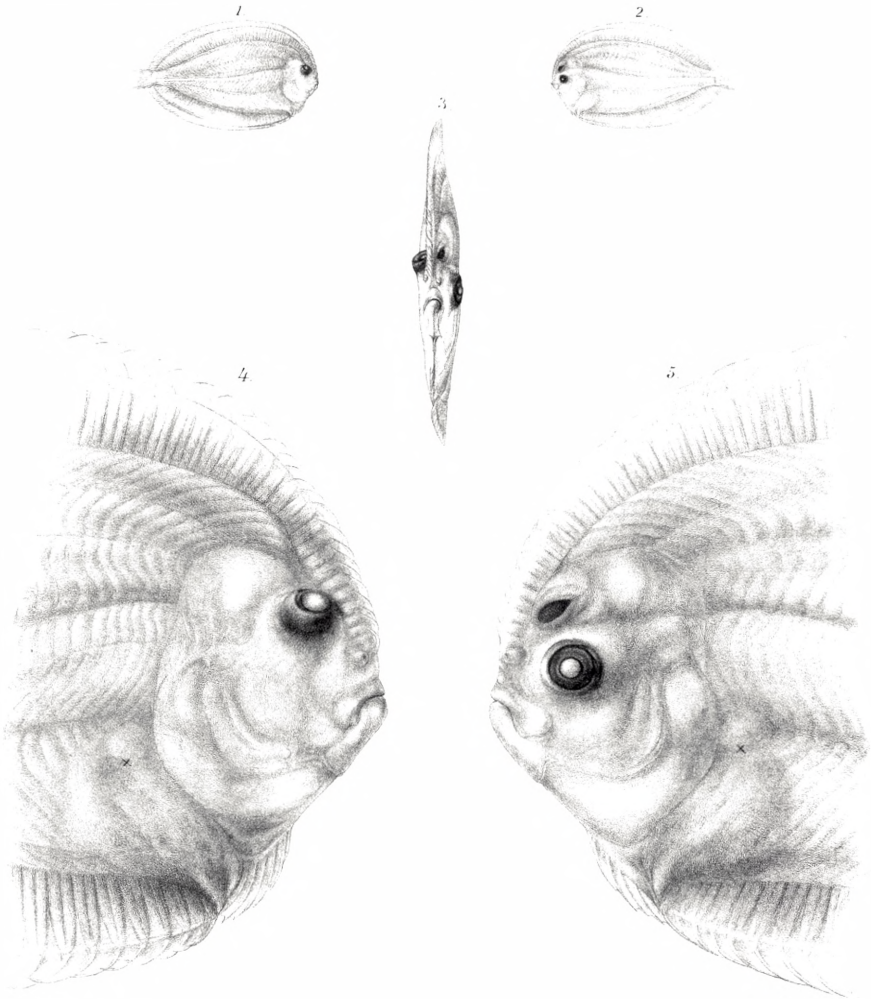


Fig. 8. Pighvarre
(*Rhomb. maximus*).

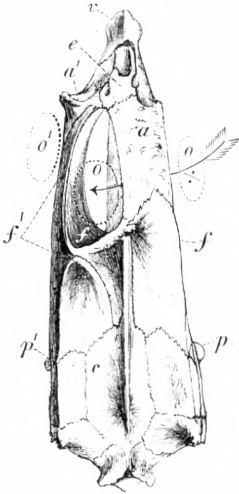


Fig. 7. Rødspætte
(*Pleuronectes platessa*).

Fig. 7b.

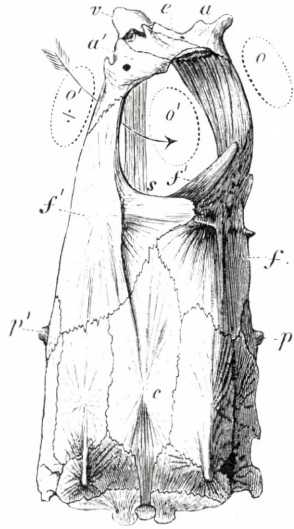


Fig. 6. Torsk.
(*Gadus Callarias*).



Fig. 9.
(*Rhomb. longimanus*).



Fig. 10. Argushvarre
(*Rhomb. longimanus*).

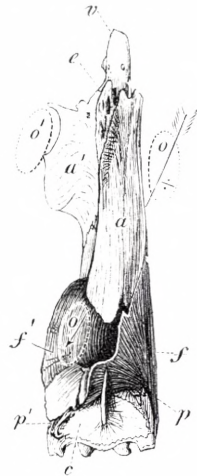


Fig. 11. *Malms Slethvarre-Unge*.

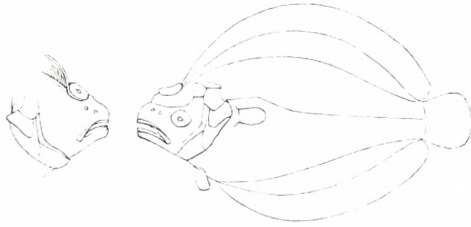


Fig. 12. *Donovans Pleuronectes cyclops*.

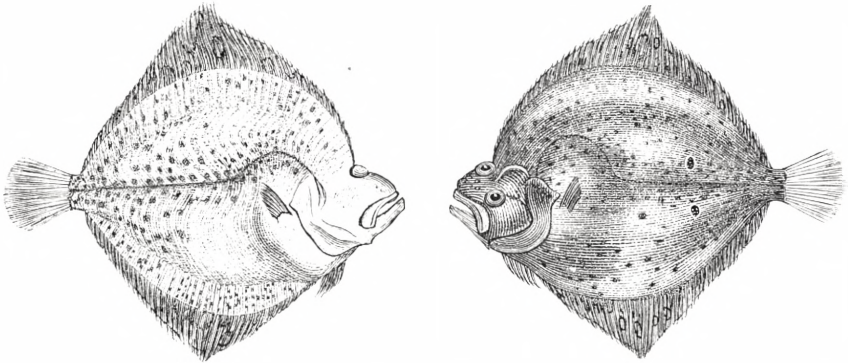


Fig. 14. *En Slethvarre*.
(*Rhomb barbatus*).

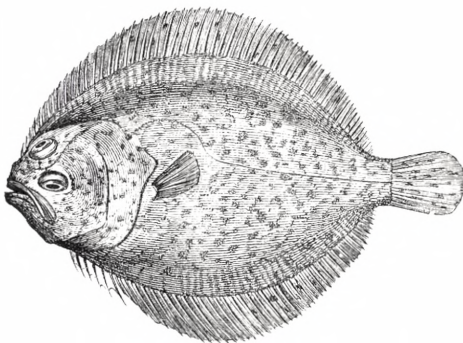


Fig. 13. *Farrets* malformed Brill.

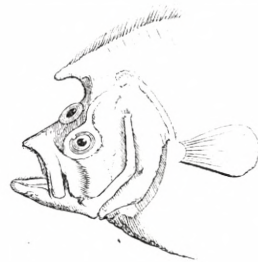


Fig. 1.

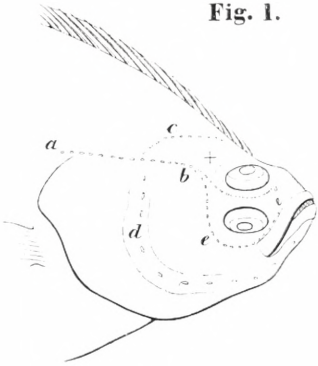


Fig. 2.

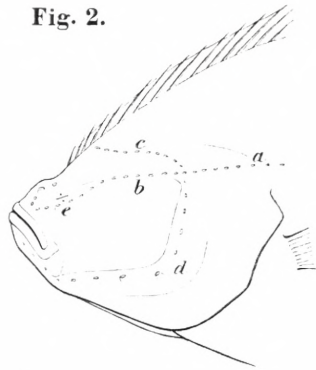


Fig. 3.

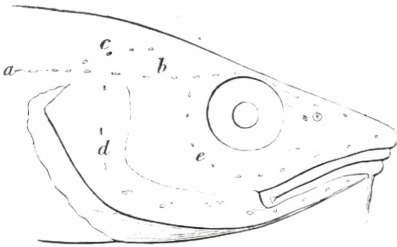


Fig. 5.

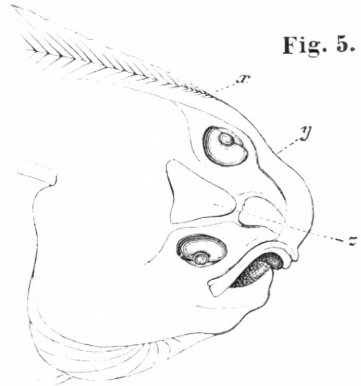


Fig. 4.

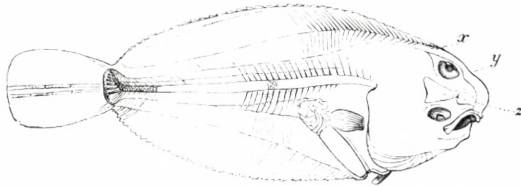


Fig. 6.



Fig. 7.



Explication des Planches I—IV.

Planche I.

Les Fig. 1—5 représentent un seul et même poisson plat, qui a été pris, en 1870, par M. le capitaine A. F. Andréa, par $24^{\circ} 16'$ de Lat. N. et $80^{\circ} 40'$ de Long. O. du méridien de Greenwich. C'est un de ces poissons plats dits «plagusiaformes» que j'ai décrits dans mon premier mémoire sur la position des yeux chez les Pleuronectides (Vid. Selsk. Overs., 1863), et représentés, dans trois phases différentes, sur la planche qui l'accompagne. Il correspond à la phase intermédiaire (Fig. 2 *a, b* et 2 *A, B*), qui est caractérisée par la circonstance remarquable, que l'œil du côté droit (le côté aveugle) est en train de traverser la tête obliquement et de se faire jour sur le côté oculaire, où il prendra place un peu plus tard comme œil supérieur.

- Fig. 1. L'animal en grandeur naturelle, vu du côté droit.
 — 2. Le même en grandeur naturelle, vu du côté gauche.
 — 3. Le même, avec un grossissement de 3 fois, vu de devant et un peu obliquement.
 — 4. Partie antérieure du même, avec un grossissement de 5 fois, vue du côté droit.
 — 5. Même partie, avec le même grossissement, vue du côté gauche.

Le signe \times , sur les Fig. 4 et 5, indique la place des nageoires pectorales.

Planche II.

Toutes les figures sont destinées à éclaircir la structure osseuse du crâne dans la famille des poissons plats, en opposition à cette structure chez les poissons osseux réguliers; ce sont des figures sur bois, qui, à l'exception de la Fig. 7^b, ont été empruntées au texte de mon premier mémoire (Vid. Selsk. Overs. 1863), et, pour faciliter la comparaison, on les a disposées ici à côté les unes des autres sur une planche.

- Fig. 6. Crâne d'un Cabliau ordinaire (*Gadus callarias*).
 — 7. Crâne d'une Plie (*Pleuronectes platessa*).
 — 7^b. Bord de gauche du même crâne, avec la chaîne des osselets de l'arc infraorbital de gauche (*io*).
 — 8. Crâne d'un Turbot (*Rhombus maximus*).
 — 9. Crâne d'un Turbot-Argus (*Rhomboidichthys longimanus*), vu du côté gauche.
 — 10. Même crâne, vu d'en haut.

Les lettres ont la même signification sur toutes les figures.

f et f' = frontalia propria, dextra et sinistra.

a et a' = frontalia anteriora, dextr. et sin.

p et p' = frontalia posteriora, dextr. et sin.

v = vomer.

e = ethmoideum.

c = crista occipitalis.

o et o' = désignent la place (orbita et bord orbital) de l'œil droit et de l'œil gauche.

Le signe \div marque la place d'où l'œil du côté aveugle s'est retiré.

La flèche indique d'une manière générale la direction que l'œil a suivie pendant son déplacement.

Planche III.

Les figures servent à éclaircir les rapports entre certaines formes monstrueuses fréquentes parmi les Pleuronectides, et les Pleuronectides normaux, jeunes et vieux.

Cette planche se compose aussi de figures sur bois empruntées à mon premier mémoire (Vid. Selsk. Overs. 1863, p. 27, 29).

Fig. 11. Jeune Barbue (*Rhombus barbatus*), d'après Malm (Kgl. Sv. Vetenskaps-Akademiens Öfversigter, 1854).

— 12. *Pleuronectes cyclops* Don., long de $1\frac{3}{8}$ pouce = *Rhombus maximus*,

très jeune (Donovan. Nat. Hist. of British Fishes, Vol. IV, Pl. 90).

— 13. Barbue monstre: «Malformed Brill» Yarrell (Brit. Fishes, 3 Edit., p. 643).

— 14. Barbue normale (*Rhombus barbatus*).

Planche IV.

Les Fig. 1—3 représentent la marche caractéristique des branches de la ligne latérale sur la tête des poissons plats, en opposition à leur marche chez les poissons osseux normaux (comp. le texte, p. 193—196).

Fig. 1. Tête d'un poisson plat, un Flet (*Platessa flesus*), vue du côté des yeux (côté droit);

— 2. La même, vue du côté aveugle (côté gauche);

— 3. Tête d'un cabliau (*Gadus callarias*), vue du côté droit.

Les lettres ont la même signification dans les trois figures.

a Partie antérieure de la ligne latérale proprement dite (Linea lateralis).

b Sa continuation plus immédiate, branche principale, branche frontale.

c Branche supratemporale.

d Branche préoperculaire.

e Branche infraorbitale ou arc infraorbital.

Sur les deux têtes de poisson plat, Fig. 1 et 2, le signe \div indique une aire ou région où les poissons normaux ont un œil, mais d'où celui-ci a disparu chez les poissons plats (comp. le même signe sur la Pl. II, Fig. 7, 8, 9, 10, et pour les parties environnantes du squelette, Pl. II, Fig. 7^b).

Le signe $+$, au contraire, indique une aire où, chez les poissons plats, un œil est venu se loger, mais où l'on n'en trouve jamais chez les poissons osseux normaux.

Les Fig. 4—7 représentent avec un grossissement une toute petite sole (*Solea*); ce sont des copies d'après le dernier mémoire publié par M. Malm dans les Kgl. Vetensk. Acad. Handlingar, Vol. VII, n. 4, et elles servent à éclaircir la physionomie différente qu'un même individu, au même degré de développement, peut présenter à l'observateur, et l'interprétation différente qu'on doit involontairement donner à ce degré de développement, suivant qu'on voit la région de l'œil et la partie voisine ou environnante de la Dorsale dans une position libre ou contractée.

- Fig. 4. Petite sole (*Solea*), longue seulement de 12 millim., vue en entier du côté des yeux; à cause de l'espace, j'ai dû la réduire photographiquement à environ la moitié de la grandeur à laquelle M. Malm l'a représentée (Pl. II, Fig. 11).
- 5. Tête de la même, de la grandeur à laquelle M. Malm l'a dessinée avec le plus grand soin et la plus grande fidélité, d'après l'animal encore vivant.
- 6 et 7. Tête de la même sole et avec le même grossissement, vue du côté des yeux et du côté aveugle, dessinée 2 jours plus tard d'après le même individu, qui, immédiatement après le premier dessin, avait été mis dans de l'esprit de vin faible (comp. notre Pl. III, Fig. 11).

Trykfeilsliste

til

„Ny Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices“.

Pag. 54	Linie 1 f. o.	$\frac{\partial^m x^a}{\partial x^m}$	læs	$\frac{\partial^m x^{a'}}$
— 105	— 5 f. n.	x	læs	$f(x)$
— 111	— 4 f. o.	$= \gamma \frac{\gamma^{(m)}}{\xi^m} \int_a^{(m)} f(\xi) d\xi^m$	læs	$= \frac{\gamma^{(m)}}{\xi^m} \int_a^{(m)} f(\xi) d\xi^m$
— 111	— 3 f. n.	$\int_c^{(\xi)} (\xi^n - x^{n,m-1} \varphi(x) dx$	læs	$\int_c^{(\xi)} (\xi^n - x^{n,m-1} \varphi(x) dx$
— 115	— 10 f. o.	$\frac{H(\xi)}{\zeta}$	læs	$\frac{H(\xi)}{\xi}$
— 131	— 5 f. o.	$\sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} (x+c)^{i' p'}$	læs	$\sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} (x+c)^{i' p}$
— 155	— 2 f. n.	$\frac{d^{m_1}}{dx_1^{m_1}} \frac{d^{m_2} y}{dx_2^{m_2}}$	læs	$\frac{d^{m_1}}{dx_1^{m_1}} \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}}$
— 155	— 1 f. n.	$\frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} \frac{d^{m_1} y}{dx_1^{m_1}}$	læs	$\frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} \frac{d^{m_1} y}{dx_1^{m_1}}$
— 156	— 2 f. o.	$\frac{d^{m_1+m_2+m_3+\dots} y}{dx_1^{m_1+m_2+m_3+\dots}}$	læs	$\frac{d^{m_1+m_2+m_3+\dots} y}{dx_1^{m_1} dx_2^{m_2} dx_3^{m_3} \dots}$
— 156	— 9 f. o.	$\int_{a_1}^{(m_1)} dx_1^{m_1} \int_{a_2}^{(m_2)} dx_2^{m_2} \dots$	læs	$\int_{a_1}^{(m_1)} dx_1^{m_1} \int_{a_2}^{(m_2)} dx_2^{m_2} \dots$
— 156	— 8 f. n.	$\frac{d^{-m_1-m_2-\dots-m_{i'}} f}{dx_1^{-m_1} dx_2^{-m_2} \dots dx_{i'}^{-m_{i'}}$	læs	$\frac{d^{-m_1-m_2-\dots-m_{i'}} f}{dx_1^{-m_1} dx_2^{-m_2} \dots dx_{i'}^{-m_{i'}}$

F. Buchwaldt.

Sag- og Navnefortegnelse.

- Akademie der Wissenschaften in Wien, Kais. Kön.*, takker for Oversendelsen af Betænkningen over Hofraad *Wex's* Arbejde, S. (55).
- Alfred*, Kong, hans Beretninger om Hvalros- og Hval-Fangsten i det 9de Aarh., Foredrag af Etatsr. *J. Steenstrup*, S. (46).
- Allmann, George James*, forhen Professor i Naturhist. i London, optages som Medlem, S. (60).
- Arabernes Indflydelse paa Siciliens Kulturforhold*, Foredrag af Prof. *van Mehren*, S. (20) og 24-40.
- Baër, K. E. von*, Selskabets udenlandske Medlem, hans Død anmeldes, S. (60).
- Barfoed, Chr. Th.*, Professor, Lektor, bliver Medlem af Bestyrelsen for Carlsbergfondet, S. (51) og (53).
- Barghon de Fort-Rion*, Baron *F. de*, meddeler, at han vil tilsende Selskabet *La Chronique de Canut IV, le Saint*, S. (20).
- Beaumont, Élie de*, Indbydelse til Bidrag til et Mindesmærke over ham, S. (19).
- Bendz, H. C. B.*, Etatsr. Dr., stiller Selskabet Slutningen af sin «Haandbog i Husdyrenes Fysiologi», S. (29); tilraader Selskabet at modtage Kaptajn *Jacobsens* Tilbud angaaende Carlsbergfondet uden Diskussion, S. (44); er med at overbringe en Svarskrivelse til Stifteren af Fondet, S. (44).
- Brahe*, se *Tyge Brahe*.
- Buchwald, F.*, Kapitajn, indsender en Afhandling om *Differentiation* med hvilkesomhelst Indices, S. (20); Komité nedsættes, S. (20); afgiver Betænkning og tilraader Optagelse i *Skrifterne*, hvilket vedtages, S. (48)—(50); trykt i denne Oversigt S. 51—157, *Résumé*, S. 14.
- Budget for 1877*, S. (57)—(59).
- Bureauet for Norges geografiske Opmaaling*, Bestemmelse tages ang. dets Sendinger af Kort og Bøger, S. (60).
- Carlsbergfondet*. Kapt. Brygger *J. C. Jacobsen* tilskriver Præsidenten ang. Stiftelsen af Fondet med en Anmodning til Selskabet om at «tage det under sin Varetægt», S. (31); Skrivelsen til Selskabet, S. (32)—(33); Statutterne, S. (35)—(43); Præsidentens Forelæggelse af Sagen for Selskabet, S. (43)—(44); Selskabet beslutter at opfylde Stifterens Ønske, S. (44); vedtager en Svarskrivelse, S. (44)—(45); Præsidenten meddeler Selskabets Protektor, H. M. Kongen, Fondets Stiftelse og det Forhold, hvori Selskabet træder til det, S. (46); Statutterne faa Kgl. Konfirmation, S. (51); Bestyrelsen med Tilforordnede vælges, S. (51), (53) og (55); Konferensr. *Madvig* vælges til Formand for Bestyrelsen,

- S. (53); mindre Udgifter i Anledning af Fondets Oprettelse bæres af Vidsk. Selskab. S. (55).
- Christiansen, Chr.*, Docent, holder et Foredrag over Magnetisering af blødt Jern, S. (14).
- Classenske Legat*, S. (17).
- Colding, Aug.*, Prof. Stadsingeniør, meddeler en Undersøgelse over de ved Vindens Kraft fremkaldte Strømninger i Havet, S. (14) jfr. S. 1—11; dette Arbejde fremlægges trykt i Selskabet, S. (52).
- Congrès International des Orientalistes*, tredje Sammenkomst 1876 i St. Petersborg, S. (21).
- Cremona, Luigi*, Direktør for Ingeniørskolen i Rom, optages som Medlem, S. (12); takker for Valget, S. (20).
- Delisle, Léopold-Victor*, Direktør for Nationalbibliotheket i Paris, bliver udenlandsk Medlem, S. (26).
- Differentiation med hvilkesomhelst Indices*, Afhdl. af Kaptajn *Buchwald*, indsendes, S. (20); Komité nedsættes, S. (20); Optagelse i *Skriverne* tilraades og vedtages, S. (48)—(50); trykt i denne Oversigt, S. 51—157, *Résumé* S. 14.
- Ehrenberg, C. G.*, Selskabets udl. Medlem, dør, S. (46).
- Fausboll, Viggo*, Bibliotheks-Assistent, optages som Medlem, S. (26).
- Flyndernes Øjestilling*, Afhdl. af Etatsr. *Steenstrup*, (59) og S. 174.
- Foetalspalte i Menneskets Øje*, Foredrag af Prof. *Hannover*, S. (56) og 41—50, *Résumé* S. 8—13.
- Gasran*, Hofpræst, Bibliothekar i Athen, S. (29).
- Gislason, K.*, Prof. Dr., er Medlem af Komiteen ang. Prof. *Lunds* olddanske Ordbog, S. (21) og (28).
- Glasby*, Prisopgave herom, S. (17).
- Gmelin-Krauts Kemi*, 3dje Bind, forelægges af Lektor *Jørgensen*, der har bearbejdet samme, S. (21).
- Grundtvig, Svend*, Professor, er Medlem af Komiteen ang. Prof. *Lunds* olddanske Ordbog, S. (21), (28).
- Grønlund, C.*, Adjunkt, ansøger om Understøttelse til en Rejse til Island for at undersøge denne Øs Flora, S. (13); Komité nedsættes, S. (13), Betænkning afgives, S. (14); 500 Kroner tilstaaes, S. (14); sender Selskabet en Beretning om Rejsen, S. (46)—(48).
- Guldets Haloïdforbindelser*, Foredrag af Prof. *Jul. Thomsen*, S. (22).
- Haloïdforbindelser, Guldets*, Foredrag af Prof. *Jul. Thomsen*, S. (22).
- Hannover, Ad.*, Prof. Dr., hans Afhdl. om *Øjets Nethinde* fremlægges trykt, S. (13); faar Tilladelse til at benytte Kobberpladerne til en fransk Oversættelse af denne Afhdl., S. (13); meddeler sine lagtagelser ang. Levninger af den «foetale Spalte i Menneskets Øje», S. (56), 41—50, *Résumé* S. 8—13.
- Heegaard, Sofus*, Prof. Dr., bliver Medlem af Selskabet, S. (56).
- Helmholtz, Hermann*, Professor i Berlin, optages som Medlem, S. (12).
- Hermite, Charles*, Prof. i Mathematik i Paris, optages som Medlem, S. (12); takker for Valget, S. (20).
- Historisk-filosofisk Klasse*, S. (14), (25), (26), (55), (56).

- Holm, E.*, Prof. Dr., indtræder i Kassekommissionen, S. (28); i Bestyrelsen for Carlsbergfondet, S. (51); bliver Sekretær i denne, S. (51 og (53).
- Holten, C.*, Professor, meddeler de Resultater, som Hr. *P. la Cour* har udtaget af *Tyge Brahes* Vejr-lagttagelser 1582-97, S. (12); jfr. S. (60).
- Huxley, Thomas H.*, Professor ved den Kgl. Bjergværksskole i London, optages som Medlem, S. (12); takker for Valget, S. (19).
- Hvalros- og Hvalfangsten* i Norden i det 9de Aarhundrede efter Kong *Alfreds* Beretninger, Foredrag af Etatsr. *J. Steenstrup*, S. (46).
- Islands Flora*, Understøttelse bevilges Adjunkt *Grønlund* til en Rejse for at forberede et Værk herover, S. (13) og (14), (47)—(48).
- Jacobsen, J. C.*, stifter Carlsbergfondet, S. (30)—(44); modtager Selskabets Tak, S. (45); indtræder som Tilforordnet i Laboratorie-Bestyrelsen, S. (51), (53) og (55).
- Johnstrup, Fr.*, Professor, er Medlem af Komiteen ang. Adjunkt *Grønlunds* Andragende om Understøttelse til en Islandsrejse, S. (13) og (14).
- Jørgensen, S. M.*, Lektor Dr., forelægger det af ham bearbejdede 3dje Bind af *Gmelin-Krauts* Kemi, S. (21).
- Kassekommissionen*, S. (14), (22); Etatsr. *L. Müller* udtræder, og i hans Sted vælges Prof. *E. Holm*, S. (28); forelægger Budgettet for 1877, S. (57).
- Kasserer*, som saadan gjenvælges Prof. *Reinhardt*, S. (28).
- Kirchhoff, Gustav*, Professor i Berlin, optages som Medlem, S. (12); takker for Valget, S. (19).
- Kogsbølle, E.*, Brygger, bliver tilforordnet Carlsbergfondets Laboratoriebestyrelse, S. (51), (53) og (55).
- Konstanter* i den sfæriske og theoretiske Astronomi, Prisopgave herom, S. (15)—(16).
- Krabbe, Harald*, Dr. med., bliver Medlem, S. (27).
- La Cour, P.*, Underbestyrer af meteorol. Institut, uddrager almindelige Resultater af *Tyge Brahes* Vejr-lagttagelser, S. (12).
- Lange, Johan*, Professor, er Medlem af Komiteen ang. Adjunkt *Grønlunds* Andragende om Understøttelse til en Islandsrejse, S. (13) og (14); takker i Egenskab af Botanisk Haves Direktør for en Gave af meteorologiske Instrumenter, S. (29).
- Lassen, Christian*, Selsk. udl. Medlem, dør, S. (46).
- Litré, Émile*, af *l'Académie Française*, optages som udenlandsk Medlem, S. (26).
- Livius'* Fremstilling af den romerske Historie, Foredrag af Konferensr. *Madvig*, S. (54)—(55) og 158—173.
- Legater*, det *Thottske*, S. (16)—(17); det *Classenske*, S. (17); det *Schouske*, S. (15), (18).
- Lorenz, L.*, Professor, er Medlem af Komiteen ang. Dr. *C. Tychsens* «Note til en Spilleropgave» etc., S. (20), (21)—(22); er Medlem af Komiteen ang. Kaptajn *Buchwalds* Afhandling om Differentiation, S. (20), (48)—(50).
- Ludwig, Carl*, Professor i Leipzig, optages som Medlem, S. (12); takker for Valget, S. (19).
- Lund, G. Fr. V.*, Prof. Rektor Dr., andrager om Understøttelse til en Ordbog

- til Skaanske, Jyske og de 2 Sællandske Love, S. (21); en Komité nedsættes, S. (21); 500 Kroner bevilges, S. (28)—(29); takker i den Anledning, S. (46).
- Lysbrydning og Farvespredning af flygtige Stoffer*, Prisopgave herom, S. (16).
- Lütken, Chr. Fr.*, Assistent ved det Zoolog. Museum, hans Afhdl. om *Velhasflodens Fiske* fremlægges trykt, S. (13).
- Madvig, J. N.*, Konferensr. Prof. Dr., bliver Medlem af og Formand for Carlsbergfondets Bestyrelse, S. (51) og (53); holder et Foredrag om *T. Livii* Fremstilling af den romerske Historie, S. (54)—(55) og 158—173.
- Magnetisering af blødt Jern*, Foredrag herom af Docent *Christiansen*, S. (14).
- Mahtáb chand Báhdúr*, Maharaja i Burdwan, sender Selskabet Skrifter S. (52).
- Mathematisk-naturvidenskabelig Klasse*, S. (14), (25), (26), (55), (56), (59)—(60).
- Medlemmers Optagelse*, Betingelser herfor, S. (29).
- Mehren, A. F. van*, Prof. Dr., forelægger *Michele Amaris* Samling af arabiske Indskrifter paa Sicilien og forbinder dermed et Foredrag om Arabernes Indflydelse paa Siciliens Kulturforhold, S. (19)—(20) og 24—40.
- Menneskets Tilværelse før Istiden*, Bemærkninger herom af Etatsr. *Steenstrup*, S. (26).
- Meteorologiske Instrumenter* skjænkes af Selskabet til Botanisk Have, S. (29).
- Michele Amaris*' Værk: *Epigrafi Arabiche di Sicilia* forelægges af Prof. *van Mehren*, S. (19)—(20); jfr. S. 24—40.
- Miklosich, Franz*, Professor i Wien, bliver Medlem af Selskabet, S. (56).
- Misdannelsens fysiologiske Betydning*, Foredrag herom af Prof. *Panum*, S. (53).
- Müller, L.*, Etatsr. Dr., udtræder af Kassekommissionen, S. (28).
- Nationalbibliotheket i Athen* lover at lende et fotografisk Aftryk af en Papyrus-Original, S. (29).
- Natriumforbindelsers* Betydning for Planternes Udvikling, Prisopgave herom, S. (17).
- Nielsen, Rasmus*, Prof. Lic. Dr. phil., bliver Medlem af Selskabet, S. (56).
- Observatoriet i Wilhelmshaven* træder i Bytteforbindelse med Selskabet, S. (21).
- Ordbog til Skaanske, Jyske og de to Sællandske Love*, af Prof. *Lund*, S. (21), (28)—(29), (46).
- Ottars Rejse se Healros- og Hvalfangsten*.
- Palacky, Franz*, bøhmisk Historieskriver, bliver udenlandsk Medlem, S. (26). han dør, S. (46).
- Paludan-Müller, C.*, Prof. Dr., Selsk. Medl., gjør en Forespørgsel ang. indenlandske Medlemmers Optagelse, S. (27), (29).
- Panum, P. L.*, Prof. Dr., bliver Medlem, af Bestyrelsen for Carlsbergfondet, S. (51) og (53); holder et Foredrag om «Misdannelsens fysiologiske Betydning», S. (53).
- Papyrus-Original* i Athen loves i fotografisk Aftryk, S. (29).
- Prisopgaver* udsættes for 1876, S. (15)—(19); ingen Besvarelse indkommen paa dem, hvis Frist udløber den 31te Oktober, S. (54).
- Protector*, Selskabets, H. M. Kongen, underrettes om Carlsbergfondets Stiftelse, S. (44) og (46).
- Præsidenten* modtager en Skrivelse fra Kaptajn *Brygger Jacobsen* ang. Stiftelsen af *Carlsbergfondet*, S. (31); forelægger Sagen for Selskabet,

- S. (43)—(44); overbringer Stifteren en Skrivelse fra Selskabet, S. (44) og (46); forebringer Sagen for H. M. Kongen, S. (44) og (46); meddeler at Statutterne have faaet Kgl. Konfirmation, S. (51); meddeler Selsk., at Bestyrelsen for Carlsbergfondet har valgt Konferensr. *Madvig* til Præsident, samt ved Lodtrækning ordnet Bestyrelses-Medlemmernes Funktionstid, S. (53).
- Reaktionernes Hurtighed*, kemisk Prisopgave, S. (16)—(17).
- Redaktøren* fremlægger *Skrifternes* 5te R. math.-naturv. Afd. B. XI, 2 og B. XII, 2, S. (13); fremlægger samme Række, samme Afd. B. XI, Nr. 3, S. (52); fremlægger Oversigt for 1876, Nr. 1, S. (48), Nr. 2, S. (56).
- Regesta-Kommissionen*, S. (52).
- Regnskabsoversigt for 1875*, S. (22)—(25).
- Reinhardt, Joh.*, Prof., gjenvælges som Kasserer, S. (28).
- Romernes klassiske Skribenters* Indflydelse paa Kejsertidens Grammatikere, Prisopgave herom, S. (15).
- Roskilde Domkirkes Beskrivelse*, 7de Hæfte forelægges, S. (54).
- Salmon, George*, Dr. theol., Matematiker, Professor i Dublin, optages som Medlem, S. (12); takker for Valget, S. (19).
- Scheel, L. V.*, Assistent i Generaldirektoratet for Skattevæsenet, hans prisbelønnede Afhdl. om *Brændevinsbrandingen* trykkes, S. (56).
- Schjellerup, H. C. F. C.*, Prof. Dr., er Medlem af Komiteen ang. Dr. C. Tychsens »Note til en Spilleropgave» etc., S. (20), (21)—(22).
- Schiern, E.*, Prof. Dr., meddeler Bemærkninger om Nilens Kildesøer, S. (28).
- Schmidt, Karl*, Adjunkt i Odense, faar udbetalt den ham tilstaaede Understøttelse til et spektral-analytisk Apparat, S. (13).
- Schouske Legat*, S. (15), (18).
- Sekretæren* meddeler Oplysninger om Forretningsgangen i Selskabets Arkiv og Sekretariat, S. (21); foreslaar Udvexling af Skrifter med *Verein f. Brenische Geschichte*, S. (27), med *Soc. di Scienze Naturali* i Pisa, S. (27); som Sekretær gjenvælges Etatsr. *Steenstrup*, S. (28); er med at overbringe Kaptajn *Jacobsen* en Svarskrivelse i Anledn. af Carlsbergfondets Stiftelse, S. (44); giver en Oversigt over det i Ferien Forefaldne, S. (46); giver Oplysninger om Benyttelsen af Selskabets Lokaler, om forskellige Bogsendinger og Selskabets Oplag af Skrifter, S. (53)—(54); meddeler, at der ikke er indkommet nogen Besvarelse af Prisspørgsmaal, S. (54); fremlægger »Roskilde Domkirkes Beskrivelse» 7de Hæfte, S. (54).
- Siebold, Carl Th. E. von*, Professor i München, optages som Medlem, S. (12).
- Skovenes Udstrækning i Danmark* i de sidste Aarhundreder, Prisopgave herom, S. (18).
- Smith, Caspar W.*, Docent, Dr. phil. optages som Medlem, S. (26).
- Società Toscana di Scienze Naturali* i Pisa træder i Bytteforbindelse med Selskabet, S. (27).
- Société Linnéenne de Normandie*, i Caen, opfordrer paany til at bidrage til et Mindesmærke over Élie de Beaumont, S. (19).
- Société Néerlandaise pour le Progrès d'Industrie*, i Haarlem, indbyder til at medvirke til et *Musée d'Art appliqué à l'Industrie*, S. (21).

- Spektral-analytisk Apparat*, Understøttelse til Anskaffelse af et saadant anvises Adjunkt *K. Schmidt*, S. (13).
- Spilleropgave i Laplace's Théorie analytique des Probabilités*, en Note hertil, Afhandling af *Dr. Tychsen* indsendes, S. (20); Betænkning afgives, S. (21)—(22); Afhandl. optages i «*Oversigten*», S. 12—23.
- Steen, Ad.*, Prof. Dr., er Medlem af Komiteen ang. *Dr. C. Tychsens* «Note til en Spilleropgave» etc., S. (20), (21)—(22); er Medlem af Komiteen ang. Kaptajn *Buchwalds* Afhdl. om Differentiation, S. (20), (48)—(50); bliver Formand for den math.-naturv. Klasse, S. (56).
- Steenstrup, Japetus*, Etatsr. Prof. Dr., er Medlem af Komiteen ang. Adjunkt *Gronlund's* Andragende om Understøttelse til en Islandsrejse, S. (13) og (14); meddeler Bemærkninger om *Menneskets Tilværelse* i den Tid, der gik forud for Istiden, S. (26); gjenvælges til Sekretær, S. (28); giver Oplysninger om Kong Alfreds i Ottars Rejse optagne Beretninger om *Hvalros- og Hvalfangsten i Norden i det 9de Aarh.*, S. (46); bliver Medlem af Bestyrelsen for Carlsbergfondet, S. (51) og (53); til hans Afhdl. om Flynderne bevilges en Tavle og Træsnit, S. (59); Afhdl. om *Øjstillingen hos Flynderne*, S. 174.
- Steenstrup, Joh.*, Cand. jur., indgiver Andragende om Understøttelse til en Rejse, S. (54).
- Stephens, G.* Selskabet beslutter at sende hans *Runic Monuments* til Maharajaen i Burdwan, S. (52).
- Struwe, O. W.* Geheimeraad, Direktør for Observatoriet i Pulkowa, bliver udl. Medlem, S. (27); sender Takskrivelse, S. (46).
- Strømninger i Havet, fremkaldte ved Vindens Kraft*, Meddelelse herom af Prof. *A. Colding*, S. (14) og 1—11.
- Tait, P. Guthrie*, Prof. i Fysik i Edinburgh, optages som Medlem, S. (60).
- Thomsen, Julius*, Professor, meddeler Undersøgelser over *Guldets Haloidforbindelser*, S. (22); fratræder som Formand for den math.-naturv. Klasse, S. (56).
- Thomsen, Vilhelm*, Docent Dr. phil., bliver Medlem af Selskabet, S. (56).
- Thomson, Sir William*, Prof. i Fysik i Glasgow, optages som Medlem, S. (60).
- Thorsen, P. G.*, Prof. Bibliothekar, er Medlem af Komiteen ang. Prof. *Lunds* olddanske Ordbog, S. (21), (28); giver en Udsigt over Regesta-Kommissionens Arbejde, S. (52).
- Thorkeleson, Jón*, Rektor i Reykiavik, bliver Medlem, S. (26); takker i Anl. af Optagelsen, S. (46).
- Thottske Legat*, S. (16)—(17).
- Twesten, A. D.*, Selskabets udl. Medlem, dør, S. (19).
- Tychsen, Camillo*, Bestyrer af Livrente-Anstalten, indsender en «Note til en Spilleropgave i Laplace's *Théorie analytique des Probabilités*», S. (20); Komité vælges, S. (20); Betænkning afgives, S. (21)—(22); Afhandl. optages, S. 12—23.
- Tyge Brahes* Vejr-Iagttagelser 1582—97, S. (12); hans meteorologiske Dagbog fremlægges trykt, S. (60).
- Unger, Carl R.*, Professor i Kristiania, sender Takskrivelse i Anledning af hans Optagelse i Selskabet, S. (13).

- Verein für Bremische Geschichte und Alterthümer*, træder i Forbindelse med Selskabet, S. (27).
- Westergaard, N. L.*, Etatsr. Prof. Dr., er med at overbringe en Skrivelse til Kaptajn *Jacobsen*, Carlsbergfondets Stifter, S. (44).
- Videnskabernes Selskab* udsætter Prisopgaver, S. (15)—(19).
- optager nye Medlemmer, S. (12)—(13), (26)—(27), (56), (60).
- dets Tab af udenlandske Medlemmer: *A. D. Twesten*, S. (19); *C. G. Ehrenberg*, S. (46); *Chr. Lassen*, S. (46); *Fr. Palacky*, S. (46); *K. E. von Bär*, S. (60).
- dets historisk-filosofiske Klasse, S. (14), (25), (26), (55), (56).
- dets matematisk-naturvidenskabelige Klasse, S. (14), (25), (26), (55), (56), (59)—(60).
- dets Regnskabsoversigt for 1875, S. (22)—(25).
- dets Budget for 1877, S. (57)—(59).
- dets Skrifter, 5. R. math.-naturv. Afd. B. XI, 2 og B. XII, 2, S. (13); 5. R. samme Afd. B. XI, Nr. 3, S. (52).
- Oversigt over dets Forhandlinger for 1875 Nr. 2 og 3 og for 1876 Nr. 1 S. (48), 1876 Nr. 2, S. (56).
- dets Kassekommission, se *Kassekommissionen*.
- dets Regesta-Kommission, se *Regesta-Kommissionen*.
- dets Embedsmænd, se *Præsidenten*, *Sekretæren*, *Redaktøren*, *Kassereren*.
- dets Legater, se *Legater*.
- dets Lokale, S. (54).
- dets udenlandske Forbindelser, S. (21), (27).
- de af det understøttede Skrifter: Roskilde Domkirkes Beskrivelse, 7de H., S. (54).
- Tilbageblik paa dets Virksomhed i Aaret 1876, S. (61)—(64).
- Wilhelmshaven, Det Keis. Observatorium i*, indleder en Skrift-Udveksling med Selskabet, S. (21).
- Wimmer, Ludvig*, Docent Dr. phil., bliver Medlem af Selskabet, S. (56).
- Zeuthen, H. G.*, Docent Dr., er Medlem af Komiteen ang. Kaptajn *Buchwalds* Afhdl. om Differentiation, S. (20), (48)—(50); sender Selsk. et af sine Arbejder, S. (52).
- Zoologisch-Botanische Gesellschaft, Kais.-Kön.*, i Wien, giver Underretning om sit 25 Aars-Jubilæum, S. (27).
- Øjestillingen hos Flynderne*, Afhdl. af Etatsr. *Steenstrup*, (59) og S. 174.
- Øjets Nethinde*, Afhdl. af Prof. *A. Hannover*, fremlægges trykt, S. (13); Pladerne dertil benyttes til en fransk Oversættelse, S. (13).

(Bogliste til det K. D. Vid. Selsk. Oversigt f. 1876.)

Liste over de til det Kgl. Danske Videnskabernes
Selskab indsendte og i dets Møder i Aaret
1876 fremlagte Skrifter.

I Mødet den 14^{de} Januar

fremlagdes fra:

The Geological Society of London.

1. The Quarterly Journal. Vol. XXXI, P. 4. N^o 124. London 1875.
2. List of the Society. November 1st, 1875.

The Royal Physical Society of Edinburgh.

3. Proceedings. Session 1874—75. Edinburgh 1875.

The Meteorological Committee's Office, Calcutta.

4. Reports. Meteorological Abstracts for 1867—1874. Calcutta 1868—75. Fol.
5. Administration Reports. 1870—1872 & 1873—1875. Fol.
6. Report of the Midnapore and Burdwan Cyclone of the 15th and 16th of October 1874, by W. G. Willson. Calcutta 1875. Fol.

Det Danske Meteorologiske Institut i Kjøbenhavn.

7. Meteorologisk Aarvog for 1874. Kjøbenhavn 1875. Fol.
— Vejrovsigt for November 1875. — Bulletin météor.
du Nord. Novembre 1875.

La Società Malacologica Italiana, Pisa.

8. Bullettino. Vol. I. Fasc. 1. Pisa 1875.

Il Sign. Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

9. Rivista scientifico-industriale. Novembre 1875. Firenze.

La Società Adriatica di Scienze Naturali in Trieste.

10. Bollettino. Ottobre 1875. Trieste 1875.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

11. Atti e Memorie. 1875. N. 19—21.

La Direzione del Cosmos (Sign. Guido Cora, Via Provvidenza 17), Torino.

12. Cosmos. Volume III, 1875. 2—3. Torino 1875.

M. Garcin de Tassy, de l'Institut, Paris.

13. La langue et la littérature hindoustaniens en 1875, par Garcin de Tassy. Paris 1876.

M. A. Preudhomme de Borre, Conservateur au Musée Royal d'Histoire naturelle, Bruxelles.

14. Notes sur des empreintes d'insectes fossiles, par Preudhomme de Borre. (Ann. Soc. Entom. de Belgique T. 18). Bruxelles.

L'Observatoire Royal de Bruxelles.

15. Annales. Oct.—Nov.—Déc. 1874. 4to.

M. le Dr. Ernest Quetelet, Membre de l'Académie R. de Belgique, Bruxelles.

16. Les Perséides en 1875, par E. Quetelet. (Bull. de l'Acad. 1875). Bruxelles.

Pastor Hans Dahl, Sognepræst til Skorup og Tvilum.

17. Dansk Hjælpeordbog, af H. Dahl. Hæfte 6. Kjøbenhavn 1875.

Die Physikalische Gesellschaft zu Berlin.

18. Die Fortschritte der Physik im Jahre 1870. Jahrg. XXVI. Abth. 1—2. — Im Jahre 1871. Jahrg. XXVII. Abth. 1. Berlin 1874—75.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

19. Astronomische Nachrichten. Nr. 2068—2070, samt Titel og Register til B. 86.

I Mødet den 28^{de} Januar

fra:

Il Signor Carlo de Stefani, Vicesegretario della Società Malacologica Italiana, Pisa.

20. Considerazioni stratigrafiche sopra le Alpi Apuane e il Monte Pisano, di C. de Stefani. Roma 1875. (Boll. del R. Comitato Geol.).
21. Un brano di storia della geologia toscana, per C. de Stefani. Roma 1875. (Boll. del R. Comitato Geol.).
22. I marmi dell' Italia centrale, nota di C. de Stefani. Roma 1875. (Boll. del R. Com. Geol.).
23. Nuove specie di molluschi pliocenici italiani, di C. de Stefani. Pisa 1875. (Soc. Malac. Ital.).
24. Molluschi pliocenici racc. nei dintorni di San Miniato al Tedesco, da C. de Stefani. Pisa 1875. (Soc. Malac. Ital.).
25. Molluschi viventi nella valle del Serchio superiore illustrati da C. de Stefani. Pisa 1875. (Soc. Malac. Ital.).
26. Natura geologica delle colline della Val di Nievole e delle Valli di Lucca e di Bientina, memoria di C. de Stefani. Pisa 1875. (Soc. Tosc. di Scienze Nat.).
27. Di alcune conchiglie terrestri fossili nella terra rossa della pietra calcarea di Agnano nel Monte Pisano, nota di C. de Stefani. Pisa 1875. (Soc. Tosc. di Scienze Nat.).

La Società Malacologica Italiana, Pisa.

28. Bullettino. Vol. I. Fasc. 2. Pisa 1875.

La Società Toscana di Scienze Naturali, Pisa.

29. Atti. Vol. I. Fasc. 1—2. Pisa 1875.

La Direzione del Cosmos (Sign. Guido Cora, Via Provvidenza 17) Torino.

30. Cosmos. Vol. III, 1875. N° 4—5. Torino 1876. 4to.

- Il Sign. Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.*
31. Rivista scientifico-industriale. Dicembre 1875. Firenze 1875.
- El Observatorio de Marina de San Fernando, Cádiz.*
32. Anales. Seccion 2ª. 1874. San Fernando 1875. 4to.
- M. le Baron F. de Barghon Fort-Rion, Versailles.*
33. Étude historique sur J.-A. van der Mersch, par F. de Barghon Fort-Rion. Versailles 1875.
34. Le Druidisme au moyen-âge, par F. de Barghon Fort-Rion. Versailles 1875.
- La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.*
35. Compte-rendu. Série II. N^{os} 19—20.
- L'Observatoire Royal de Belgique, Bruxelles.*
36. Annales. Nov.-déc. 1875 & Résumé 1874. 4to.
- M. E. Quetelet, de l'Acad. R. de Belgique, Bruxelles.*
37. Sur la période de froid du mois de décembre 1875, par E. Quetelet. (Bull de l'A. 1875).
- La Société Impériale des Naturalistes de Moscou.*
38. Bulletin. 1875. N^o 2. Moscou 1875.
- The American Geographical and Statistical Society, Cooper Institute, New York.*
39. Journal. 1873. Vol. 4. Albany 1874.
- Het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, Batavia.*
40. Verhandelingen. Deel 37—38. Batavia 1875.
41. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXI. Af. 5—6. Deel XXII. Af. 4—6. Deel XXIII. Af. 1. Batavia 1874—75.
42. Notulen van de Vergaderingen. Deel XII. N^o 4. Deel XIII. N^o 1—2. Batavia 1875.
- Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.*
43. Abhandlungen. B. XII. Abth. 3. B. XIII. Abth. 1. München 1874—75. 4to.

44. Sitzungsberichte. 1875. B. II. Heft 2. München 1875.
 45. Beziehungen der Chemie zur Rechtspflege. Festrede von
 L. A. Buchner. München 1875. 4to.

Det Danske Meteorologiske Institut i Kjøbenhavn.

46. Bulletin météorologique du Nord. Décembre 1875.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

47. Astronomische Nachrichten. Nr. 2071—2073.

I Mødet den 11^{te} Februar

fra:

Byrån för Sveriges Geologiska Undersökning, Stockholm.

48. Sveriges geologiska Undersökning. Kartbladen 54—56 (Rise-
 berga, Latorp, Nora) med Beskrifning. Stockholm 1875.
 49. A. E. Törnebohm: Persbergets Grufvefält. Stockholm
 1875. 4to.
 50. O. Gumælius: Malmlagens Åldersföljd. Stockholm 1875.
 (Sv. Vetenskaps-Akad. Förh. 1875).
 51. D. Hummel: Sveriges lagrade Urberg jemförda med sydvestra
 Europas. Stockholm 1875.

Die Physikalisch-Ökonomische Gesellschaft zu Königsberg.

52. Schriften. 1873, Abth. 1—2. 1874, Abth. 1—2. Königs-
 berg 1873—74. 4to.
 53. Geologische Karte der Provinz Preussen. Blatt 9 & 17.

*Generalstabens Topografiske Afdeling ved dens Chef, Oberst
 Klिंगsey, Kjøbenhavn.*

54. Atlasbladene: Bække, Grindsted, Orre og Blaavandshuk.

Il Real Comitato Geologico d'Italia, Roma.

55. Bollettino. Anno 1875. N° 11 e 12. Roma 1875.

Die Kais. Kön. Geologische Reichsanstalt in Wien.

56. Abhandlungen. B. VI. H. 2. B. VII. H. 3. Wien 1875. 4to.
 57. Jahrbuch. Jahrg. 1875. B. XXV. Nr. 3. Wien 1875. 4to.
 58. Verhandlungen. 1875. Nr. 11—13. Wien. 4to.

Alexander Buchan, M. A., F. R. S. of Edinburgh.

59. Diurnal oscillations of the barometer, by A. Buchan. Edinburgh 1875. 4to. (Trans. R. Soc. Ed. Vol. XXVII).

Hr. Docent Dr. H. G. Zeuthen, Selskabets Medlem, Kjøbenhavn.

60. Sur une classe de points singuliers de surfaces, par H. G. Zeuthen. (Math. Ann. IX.)

Het Koninklijk Nederlandsch Ministerie van Binnenlandsche Zaken, s'Gravenhage.

61. Flora Batava. Af. 227—231. Leyden. 4to.

Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.

62. Almanach für das Jahr 1875. München.

M. George N. Zavizianos, Professeur à l'Université d'Athènes.

63. Φαρμακευτικὸν Ἀελίου ἐκδιδόμενον ἐπὶ Γ. Ζαβιζιάνου. Περίοδος δεύτέρα. Τ. πρῶτος. Τεύχος Α'. Ἀθήνησιν 1876.

Il Signor Antonio Buja, Professore di Scherma, Lecce (Terra d'Otranto).

64. La Scherma, discorsi vari per A. Buja. Lecce 1875.

Die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft zu Leipzig.

65. Preisschriften. XVIII. A. Wangerin: Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Leipzig 1875.

Die Kön. Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

66. Monatsbericht. September & October 1875. Berlin 1876.

The Editors of Iron, Journal of Science etc., 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

67. Iron. Nos. 155—160. London 1876. Fol.

Hr. Dr. Wilhelm Sklarek, (F. Dümmers Buchhandlung), Berlin.

68. Repertorium der Naturwissenschaften. Jahrg. I. N. 1—6. Berlin 1875. 4to.

La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.

69. Compte-rendu. Série II. N° 21.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

70. Maanedsoversigt. December 1875.

Librairie Gauthier-Villars, Quai des Augustins, Paris.

71. Bulletin. 1875. III. Paris.

Hr. Professor A. von Kölliker, Würzburg.

72. Die erste Entwicklung des Säugethierembryo. (Phys.-med. Ges. zu Würzburg, Verh. B. IX.)

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

73. Astronomische Nachrichten. Nr. 2074—2075.

I Mødet den 25^{de} Februar

fra:

Het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Batavia.

74, a. Verhandelingen. Deel XXXVII & XXXVIII. Batavia 1875.

74, b. Notulen van de Vergaderingen. Deel XII. N^o 4. Deel XIII. N^o 1—2. Batavia 1875.

75. Tijdschrift voor indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXI. Afh. 5—6. Deel XXII. Afh. 4—6. Deel XXIII. Afh. 1. Batavia 1875.

Professor D. Bierens de Haan, Selsk. udenl. Medlem, Leiden.

76. Tweede Ontwerp eener Naamlijst van Logarithmentafels. Door Bierens de Haan. Amsterdam 1875. 4to.

77. Geschiedenis en Bibliographie der Wiskunde. Door B. de Haan. (Nieuw Archief).

M. Ch. Hermite, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences — Selsk. udl. Medlem — Paris.

78. Cours d'analyse de l'École polytechnique, p. Ch. Hermite. I^e Partie. Paris 1873.

79. XVII mémoires de M. Hermite, extraits des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, du Journal de mathématiques et des Annali di Matematica. 4to.

La Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.

80. Mémoires. T. 1. 2^e Série. 2^e Cahier. Bordeaux 1876.
 81. Extrait des procès-verbaux des séances. 1874—75.
 Feuilles a, b & B.

*El Observatorio de Marina de la Ciudad de San Fernando
Cádiz.*

82. Almanaque náutico para 1877. Barcelona 1876. 4to.

La Società Geografica Italiana, Roma.

83. Bollettino. Vol. XII. Fasc. 10—12. Roma 1876.

The Literary and Philosophical Society of Liverpool.

84. Proceedings. 1874—1875. N^o XXIX. Liverpool 1875.

The Otago Museum, Dunedin, New Zealand.

85. F. W. Hutton & G. H. F. Ulrich: Report on the geology &
 goldfields of Otago. Dunedin 1875.

The Royal Geological Society of Ireland, Dublin.

86. Journal. Vol. XIV. P. 2. 1874—75. Dublin 1875.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

87. Iron. N^o 161.

*U. S. War Department, Surgeon General's Office, Washington
D. C.*

88. The cholera epidemic of 1873 in the United States.
 Washington 1875.

*U. S. Geological Survey of the Territories, F. V. Hayden,
U. S. Geologist-in-Charge, Washington.*

89. Catalogue of the photographs of the Survey. II^d Ed.
 Washington 1875.
 90. Bulletin N^o 5. Second series. Washington 1876.

Die Kön. Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

91. Monatsbericht. November 1875. Berlin 1876.

Die Astronomische Gesellschaft, Leipzig.

92. Vierteljahrsschrift. Jahrg. XI. H. 1. Leipzig 1876.

Hr. Lektor S. M. Jørgensen, Selsk. Medlem, Kjøbenhavn.

93. Gmelin-Krauts Handbuch der Chemie, B. III, bearbejdet von S. M. Jørgensen. Heidelberg 1871—75.

Die Kais.-Kön. Geographische Gesellschaft in Wien.

94. Mittheilungen. 1874. Wien 1874.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

95. Bulletin météorologique du Nord. Janvier 1876.

Det Astronomiske Observatorium i Altona.

96. Astronomische Nachrichten. Nr. 2076.

I Mødet den 10^{de} Marts

fra:

Det Kgl. Norske Frederiks Universitet i Kristiania.

97. Aarsberetninger for 1872 og 1873. Christiania 1873—74.
 98. Th. Kjerulf: Om Skuringsmærker, Glacialformationen, Terrasser og Strandlinier. Program. Christiania 1873. 4to.
 99. S. A. Sexe: Jættegryder. Program. Christiania 1874. 4to.
 100. H. Siebke: Enumeratio Insectorum Norvegeicorum. Fasc. I. Program. Christiania 1874.
 101. E. Hertzberg. Grundtrækkene i den ældste norske Proces. Program. Kristiania 1874.
 102. Universitets- og Skole-Annaler. Tredie Række XII, 4. XIII, 1—2. Christiania 1874.
 103. Min Hærramek ja Bæstamek Jesus Kristus oðða Testamenta. Kristianiast 1874.
 104. G. Armauer Hansen: Spedalskhedens Årsager. Christiania. 1874.

Det Meteorologiske Institut i Kristiania.

105. Meteorologisk Aarbog for 1873. Christiania 1874. Fol. obl.

Videnskabs-Selskabet i Kristiania.

106. Forhandlinger. 1873. H. 2. Christiania 1874.

Den Fysiografiske Forening i Kristiania.

107. Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. B. XX. H. 3—4.
Christiania 1874.

Det Kgl. Norske Videnskabers-Selskab i Thronhjelm.

108. Skrifter i det 19de Aarhundrede. B. VII. D. 2.
109. I. M. Norman: Allelositismus.

Il Professore Michele Amari, Senatore del Regno d'Italia, Selsk. udl. Medlem, Firenze.

110. Le epigrafi arabiche di Sicilia, trascritte, tradotte e illustrate da M. Amari. Parte I^{ma}. Iscrizioni edili. Palermo 1875. 4to.

La Société Botanique de France, Paris.

111. Bulletin. T. XXII. 1875. Comptes rendus, 2. Revue bibliogr., C. D. Paris.

La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.

112. Compte-rendu. Série II. N^o 22.

L'Observatoire Physique Central de Russie à St.-Pétersbourg.

113. Repertorium für Meteorologie. B. IV. H. 2. St.-Petersburg 1875. 4to.

M. A.-N. Neustrojew, Membre Honoraire de l'Académie Imp. des Beaux-Arts de St.-Pétersbourg.

114. Recherche historique sur les écrits périodiques publiés en Russie depuis 1703 jusqu'en 1802, par A.-N. Neustrojew. St. Pétersbourg 1875. (En russe.)

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

115. Iron. Nrs. 162—164.

U. S. Geological and Geographical Survey of the Territories, F. V. Hayden, U. S. Geologist-in-Charge, Washington.

116. Bulletin. Nr. 6. Second series. Washington 1876.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

117. Abhandlungen. B. XX. Göttingen 1875. 4to.
118. Nachrichten. 1875. Göttingen 1875.

Das Kais. Kön. Mineralogische Museum in Wien.

119. Mineralogische Mittheilungen. Jahrg. 1875. H. 1—4.
Wien. 4to.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

120. Atti e Memorie. 1875. Nr. 22—24.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

121. Maanedsoversigt. Januar. 1876.

El Colegio de Belen de la Compañía de Jesus en la Habana.

122. Observaciones magnéticas y meteorológicas. 1873. Habana
1875. Fol.

La Società Entomologica Italiana, Firenze.

123. Bullettino. Anno VII^{mo}. Trim. IV. Firenze 1875.

Die Physikalisch Medicinische Societät zu Erlangen.

124. Sitzungsberichte. H. 7. Erlangen 1875.

Le Museum d'Histoire Naturelle de Paris.

125. Nouvelles Archives. T. X. Fasc. 1—4. Paris 1873
—74. 4to.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

126. Astronomische Nachrichten Nr. 2077—2078.

I Mødet den 24^{de} Marts

fra

La Reale Accademia dei Lincei, Roma.

127. Atti. Serie II^a. Vol. I—II. Roma 1875. 4to.

La Società Geografica Italiana, Roma.

128. Bollettino. Vol. XIII. Fasc. 1. Roma 1876.

*Il Dr. Luigi Cremona, Direttore della R. Scuola d'Applicazione
per gl'Ingegneri, Selsk. udl. Medl., Roma.*

129. Les surfaces du 3^e ordre, par L. Cremona. Berlin 1868.
4to. (Journal des Math., T. 68).
130. Éléments de géométrie projective, par L. Cremona, trad.
par Dewulf. I^e Partie. Paris 1875.

131. Elemente des graphischen Calculs, von L. Cremona, Deutsch von Curtze. Leipzig 1875.

132. XI Memorie, estratte dagli Atti e Rendiconti degl'Istituti di Milano e di Bologna, degli Annali di Matematica ec.

The Royal Astronomical Society of London.

133. Memoirs. Vol. XXXIX, P. 1—2 & Vol. XLII. London 1871—75. 4to.

The Scottish Meteorological Society, Edinburgh.

134. Journal. New Series. Nos 47—48. Edinburgh 1876.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

135. Iron. N° 165—166.

The American Geographical Society, New York.

136. Bulletin. 1875—76. N° 1. New York 1876.

Die Kais.-Kön. Geologische Reichs-Anstalt in Wien.

137. Jahrbuch. Jahrg. 1875. B. XXV. Nro 4. Wien 1876. 4to.

138. Verhandlungen. 1875. Nos 14—18. Wien. 4to.

Der Naturwissenschaftliche Verein für Steiermark, Graz.

139. Mittheilungen. Jahrg. 1875. Graz 1875.

Die Medicinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Jena.

140. Zeitschrift. B. X. H. 1. Jena 1876.

M. G.-N. Zavizianos, Professeur à l'Université d'Athènes.

141. Φαρμακευτικόν Ἀερίον, ἐκδιδ. ὑπὸ Γ. Ζαβιτσιάνου. Περὶ δειύερα. Τ. Ι. Τεύχος Β'. Ἀθήνησιν 1876.

La Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne.

142. Bulletin. 2^e S. V. XIV. N° 75. Lausanne 1876.

Il Real Comitato Geologico d'Italia, Roma.

143. Bollettino. 1876. N° 1 e 2. Roma 1876.

La Società Adriatica di Scienze Naturali in Trieste.

144. Bollettino. N° 7. Dic. 1875. Trieste 1875.

Il Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

145. Rivista scientifico-industriale. Gennaio 1876. Firenze 1876.

Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.

146. Korrespondenzblatt. Jahrg. I. Nr. 1—2. 1876.

Messrs. Trübner & Co., Ludgate Hill 57, London.

147. Literary Record. Nos 112—113.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

148. Atti e Memorie. Anno XV. Nr. 1—2. 1876.

The Trustees of the Radcliffe Observatory, Oxford.

149. Observations for 1873. Vol. XXXIII. Oxford 1875.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

150. Astronomische Nachrichten. Nr. 2079—2080.

I Mødet den 7^{de} April

fra:

Die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien.

151. Denkschriften. Math.-Naturw. Classe. B. XXXIV. Wien 1875. 4to.

152. Sitzungsberichte. Phil.-Hist. Cl. B. LXXVIII. H. 2—3. B. LXXIX. H. 1—3. B. LXXX. H. 1—2. — Math.-Nat. Cl. Abth. I. B. LXX. H. 3—5. B. LXXI. H. 1—5. Abth. II. B. LXX. H. 3—5. B. LXXI. H. 1—5. Abth. III. B. LXX. H. 3—5. B. LXXI. H. 1—2. Wien 1874—75.

153. Almanach. Jahrg. 25. 1875. Wien.

154. Archiv für österreichische Geschichte. B. 52, II. B. 53, I—II. Wien 1875.

155. Fontes Rerum Austriacarum. Abth. I. B. VIII. Wien 1875.

156. Hermann Fritz: Verzeichniss beobachteter Polarlichter. Wien 1875.

Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.

157. Abhandlungen. Philos.-Philol. Cl. B. XIII. Abth. 3. Math.-Naturw. Cl. B. XII. Abth. I. München 1875. 4to.

158. Catalogus codicum Bibl. Reg. T. I. P. 1 & 4. Monachii 1875.

Die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

159. Monatsbericht. December 1875. Berlin 1876.

Il Signor Francesco Orsoni, Noto, Sicilia.

160. Fr. Orsoni: Ricerche elettro-dinamiche sulle rotazioni paleogeniche. Noto 1876. 4to.

Il Sign. Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

161. Rivista scientifico-industriale. Febbraio 1876. Firenze.

La Società Geografica Italiana, Roma.

162. Bollettino. Vol. XIII. Fasc. 2. Roma 1876.

The Royal Astronomical Society, London.

163. Monthly Notices. Vol. XXXVI. Nr. 1—4. London 1875—76.

The Museum of Comparative Zoölogy, at Harvard College, in Cambridge, Mass.

164. Annual Report 1875. Boston 1876.

L'Observatoire Royal de Bruxelles.

165. Annales. Janvier & Février 1876. Résumé 1875. Titres pour les années 1874 & 1875. 4to.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

166. Iron. N° 167.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

167. Maanedsoversigt. Februar 1876.

La Società Malacologica Italiana, Pisa.

168. Bullettino. Vol. I. Fasc. 3. Pisa 1875.

La Société Impériale des Naturalistes de Moscou.

169. Bulletin. 1875. N° 3. Moscou 1875.

La Société Entomologique de Belgique, à Bruxelles.

170. Compte-rendu. Série II. N° 23.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

171. Astronomische Nachrichten. Nr. 2081.

I Mødet den 28^{de} April

fra:

Det Kgl. Norske Frederiks Universitet i Kristiania.

172. Filologiske Prøveforelæsninger af J. Johanssen (2 Expl.) og J. P. Weisse. Christiania 1875.
173. Juridiske Prøveforelæsninger af O. Platou og B. Getz. Christiania 1875.
174. J. Johanssen: Grammatiske Studier. I. Stoikernes Inddeling af Verbets Tider. Christiania 1875.
175. R. Collett: Norvége, carte zoo-géographique. Christiania 1875. Fol.
176. F. C. Schübeler: Pflanzengeographische Karte über Norwegen. Christiania 1875. Fol.

Hr. Kammerherre Chr. Holst, Sekretær ved Universitetet i Kristiania.

177. Statsraad P. Chr. Holsts efterladte Optegnelser om sit Liv og sin Samtid. H. 1—2. Christiania 1875—76.
178. Anden Beretning om Ladegaardsøens Hovedgaard. H. 1—2. Christiania 1875. 4^{to}.

Den Fysiografiske Forening i Kristiania.

179. Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. B. XXI. H. 3—4. B. XXII. H. 1. Christiania 1875—76.

Bergens Museum.

180. Katalog over Museets Dyrsamling, af Olaf Jensen. Bergen 1875.

Der Naturwissenschaftliche Verein für Sachsen und Thüringen in Halle a. d. S.

181. Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. 1875, Juli—December. Berlin 1875.

La Società Italiana di Antropologia e di Etnologia, Firenze.

182. Archivio. Vol. V. Fasc. 3—4. Firenze 1876.

La Società Entomologica Italiana, Firenze.

183. Adunanza del 26 Dicembre 1875.

Il Signor Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

184. Rivista scientifico-industriale. Marzo 1876. Firenze.

La Società Geografica Italiana, Roma.

185. Bollettino. Vol. XIII. Fasc. 3. Roma 1876.

La Direzione del Cosmos (Sign. G. Cora), 17 Via della Provvidenza, Torino.

186. Cosmos. Vol. III. Fasc. VI—VII. Torino 1876.

La Société Botanique de France, Paris.

187. Bulletin. T. XXII. 1875. Revue bibliogr., E. Paris. Table alphabétique pour le T. XIX.

188. Liste des membres au 1^{er} janvier 1876.

De Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

189. Verhandelingen. Afd. Natuurkunde. Deel XV. Afd. Letterkunde. Deel VIII. Amsterdam 1875. 4^{to}.

190. Verslagen en Mededeelingen. Afd. Natuurkunde. Tweede Reeks. Deel IX. Amsterdam 1876.

191. Jaarboek voor 1874. Amsterdam.

192. Processen-Verbaal. Afd. Natuurkunde. Mei 1874—April 1875. Amsterdam.

193. Petri Esseiva Satira ad Procum. Acc. elegia Fr. Tr. Moltedo. Amstelodami 1875.

194. Programma certaminis poetici 1876.

Die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

195. Monatsbericht. Januar 1876. Berlin 1876.

U. S. Geological and Geographical Survey of the Territories, F. V. Hayden, U. S. Geologist, Washington.

196. Bulletin. Vol. II. N^o 1. Washington 1876.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

197. Iron. Nr. 168—171.

Dr. H. Schubert in Hildesheim.

198. H. Schubert: Beiträge zur abzählenden Geometrie. Math. Ann. B. X.

Dr. Katter, Gymnasiallehrer in Putbus.

199. Entomologische Nachrichten. Jahrg. II. H. 1—4. 1876.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

200. Atti e Memorie. Anno XV. N. 3.

Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.

201. Korrespondenzblatt. 1876. Nr. 3.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

202. Bulletin météorol. du Nord. Mars 1876.

Hr. Etatsraad Dr. H. C. B. Bendz, Selskabets Medlem, Kjøbenhavn.

203. Haandbog i den fysiologiske Anatomi af de almindeligste danske Huspattedyr, ved H. C. B. Bendz. II^{den} Del. H. 2. Kjøbenhavn 1876.

The Zoological Society of London.

204. Transactions. Vol. IX. P. 4. London 1875. 4to.

205. Proceedings. 1875. P. II—III. London 1875.

206. Vertebrated animals in the gardens of the Society. Supplement. London 1875.

The Royal Dublin Society.

207. Journal. No. XLIV. Vol. VII. Dublin 1875.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

208. Astronomische Nachrichten. Nr. 2082—2087.

Afgivet umiddelbart til Bibliotheket den 12^{te} Juni.

Fra:

The Royal Observatory, Greenwich.

209. Observations made in 1873. London 1875. 4to.

The Zoological Society of London.

210. Transactions. Vol. IX. P. 5—7. London 1875—76. 4to.

211. Proceedings. 1875. Part IV. London 1876.

The Meteorological Committee of the Royal Society, London.

212. Quarterly weather-report. Part II. April—June 1874. London 1876. 4to.
213. Physical geography of the part of the Atlantic between 20° N. and 10° S., and 10° to 40° W. London 1876.

The Royal Astronomical Society of London.

214. Monthly notices. Vol. XXXVI. Nos. 5 & 6. London 1876.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

215. Iron. Nos. 172—176.

The Geological Survey of India, Calcutta.

216. Palæontologia Indica. Ser. IX. P. 2 & 3. Calcutta 1875. Fol.
217. Records. Vol. VIII. P. 1—4. Calcutta 1875. 4to.

Senhor J. F. N. Delgado, Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa.

218. Sobre a existencia do terreno siluriano no Baixo Alemtejo, par J. F. N. Delgado. Lisboa 1876. 4to.

La Società Geografica Italiana, Roma.

219. Bollettino. Vol. XIII. Fasc. 4. Roma 1876.

Il Real Comitato Geologico d'Italia, Roma.

220. Bollettino. 1876. No. 3 e 4. Roma 1876.

La Società Entomologica Italiana, Firenze.

221. Bullettino. Anno 8. Trimestre I. Firenze 1876.

M. Léopold Delisle, de l'Institut, Paris.

222. Catalogue des Actes de Philippe-Auguste, par L. Delisle. Paris 1856.
223. La Bibliothèque Nationale en 1875, rapport de M. Delisle. Paris 1876.
224. Notice sur le Psautier d'Ingeburge, par L. Delisle. Paris 1867.

Dr. A. M. Ross, F. L. S., Toronto, Canada.

225. U. S. Centennial Exhibition. Catalogue to illustrate the animal resources of the Dominion of Canada, by A. M. Ross. Toronto 1876.

Mr. F. W. C. Trafford, Lausanne.

226. Amphiorama ou la Vue du Monde, par F. W. C. Trafford. Lausanne 1875.

M. Félix Plateau, Professeur à l'Université de Gand.

227. Félix Plateau: Une sécrétion propre aux coléoptères dytiscides.

La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.

228. Annales. T. XVIII. Bruxelles 1875.
229. Compte-rendu. Série II. Nos. 24—25.

L'Observatoire Royal de Bruxelles.

230. Annales. Mars—Avril 1876. 4to.

M. Ern. Quetelet, Membre de l'Acad. Roy. de Belgique, Bruxelles.

231. E. Quetelet: La tempête du 12 Mars 1876 (Bull. de l'Ac. R. de B., T. XLI).

La Société Khédiviale de Géographie du Caire.

232. Bulletin. No. I. Le Caire 1876.

S. Exc. M. le Baron B. de Koehne, Saint-Pétersbourg.

233. Médailles russes, par B. de Koehne (Rev. Belge de Numism. 1876).
234. Une médaille mensongère, par B. de Koehne (Rev. Belge de Num. 1876).

La Société Impériale des Naturalistes de Moscou.

235. Bulletin. 1875. No. 4. Moscou 1876.

Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.

236. Sitzungsberichte. Philos.-philol.-hist. Classe. B. II, H. 3 mit Supplement & H. 4. — Math.-phys. Classe 1875. H. 3. München 1875.

237. E. Trumpp: Einleitung in das Studium der arab. Grammatiker. Die Ajrūmiyyah des Muh'ammad bin Daūd. München 1876.
238. Catalogus Codicum Latinorum. T. II. P. 2. Monachii 1876.
- Die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.*
239. Monatsbericht. Februar 1876. Berlin 1876.
- Die Physikalische Gesellschaft zu Berlin.*
240. Die Fortschritte der Physik im Jahre 1871. Jahrg. XXVII. Abth. II. Berlin 1876.
- Der Naturwissenschaftliche Verein von Neu-Vorpommern und Rügen, Greifswald.*
241. Mittheilungen. Jahrg. VII. Berlin 1875.
- Der Naturwissenschaftliche Verein zu Bremen.*
242. Abhandlungen. Bd. IV, H. 4. B. V, H. 1. Bremen 1875—76. — Beilage N^o 5. Bremen 1875. 4to.
- Die Astronomische Gesellschaft, Leipzig.*
243. Vierteljahrsschrift. Jahrg. X, H. 4. Jahrg. XI, H. 2. Leipzig 1875—76.
- Dr. F. Katter, Gymnasiallehrer zu Putbus.*
244. Entomologische Nachrichten. Jahrg. II. H. 6. Putbus 1876.
- Die Medicinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Jena.*
245. Zeitschrift. Bd. X (N. F. III). H. 2. Jena 1876.
- Die Physikalisch-Medicinische Gesellschaft in Würzburg.*
246. Verhandlungen. N. F. B. IX. H. 1—2. Würzburg 1875.
- Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben*
247. Korrespondenzblatt. Jahrg. I. Nr. 4. 1876.
- Die Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Chemnitz.*
248. Fünfter Bericht. Chemnitz 1875.
249. Franz Kramer: Phanerogamen-Flora von Chemnitz und Umgegend. Chemnitz 1875. 4to.

Die Naturforschende Gesellschaft in Danzig.

250. Schriften. Neue Folge. B. III. H. 4. Danzig 1875.

Die Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte, Kiel.

251. Zeitschrift. B. VI. Kiel 1876.
252. Kieler Stadtbuch 1264—1289. Kiel 1875.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

253. Atti e Memorie. Anno XV. N. 4.

Messrs. Trübner & Co., 57 & 59 Ludgate Hill, London.

254. Literary Record. Nos. 114 & 115.

Hr. Docent Dr. H. G. Zeuthen, Selskabets Medlem, Kjøbenhavn.

255. Note zur les singularités des courbes planes (Math. Ann. B. X).

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

256. Meteorol. Aarvog for 1875. I. Kjøbenhavn 1876. Fol. —
Bulletin météorol. du Nord. Avril 1876. — Maanedsoversigter for Marts og April 1876.

R. Friedländer & Sohn, Carlstrasse 11, Berlin.

257. En Bogkatalog.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

258. Astronomische Nachrichten. Nr. 2089—2093, samt Titel og Register til Bind 87.

Afgivet umiddelbart til Bibliotheket den 25^{de} Juli.

Fra:

Teylers Stichting te Haarlem.

259. Archives du Musée Teyler. Vol. I. Fasc. 1. 2^e Éd. Harlem 1875. Fasc. 2—4. 1867—68. Vol. II—III & IV, Fasc. 1. Harlem 1869—76.
260. Verhandelingen rakende de natuurlijke en geopenbaarde Godsdienst. Nieuwe Serie. 4de Deel. Harlem 1876.

Universitetet i Leiden.

261. Annales academici 1871—72. Lugduni-Bat. 1875. 4to.

Die Sternwarte in Leiden.

262. Annalen. B. IV. Haag 1875. 4to.

De Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem.

263. Natuurkundige Verhandelingen. 3de Verz. Deel II. No. 5. Haarlem 1875. 4to.
264. Archives néerlandaises. T. X. Livr. 4—5. T. XI. Livr. 1. La Haye 1875—76.

De Nederlandsche Botanische Vereeniging te Leiden.

265. Nederlandsch Kruidkundig Archief. Tweede Serie. 2^e Deel. 2^e Stuk. Nijmegen 1876.

Het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut te Utrecht.

266. Meteorologisch Jaarboek voor 1871. Jaarg. 23. Deel 2. Utrecht 1875. Fol. obl.

De Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië, Batavia.

267. Natuurkundig Tijdschrift. Deel XXXIV. Zevende Serie. Deel IV. Batavia 1874.

L'Observatoire Physique Central de Russie à St.-Pétersbourg.

268. Annalen. Jahrg. 1874. St.-Petersburg 1876. 4to.

L'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.

269. Tableau général des matières contenues dans les publications de l'Académie. 1^{re} Partie. Publications en langues étrangères. St.-Pétersbourg 1872.

La Société Khédiviale de Géographie du Caire.

270. Bulletin. Nr. 2. Le Caire 1876.

The Royal Society of London.

271. Transactions. 1874. Vol. 164. P. 1—2. Vol. 165. P. 1. London 1874—75. 4to.
272. Proceedings. Vol. XXII. Nos 151—155. Vol. XXIII. Nos 156—163. London 1874—75.

273. The Royal Society. 30th November 1874. 4to.
 274. E. Klein: The anatomy of the lymphatic system. II. The Lung. London 1875.

The Royal Astronomical Society of London.

275. Monthly Notices. Vol. XXXVI. No. 7 & 8. May & June 1876.

Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademien i Stockholm.

276. Handlingar. Ny Följd. B. XI. 1872. Med et Atlas. Stockholm 1873—75. 4to.
 277. Bihang til Handlingarne. B. III. H. 1. Stockholm 1875.
 278. Öfersigt. Årgång XXXII. Stockholm 1876.
 279. Meteorologiska Iakttagelser. B. XV. 2dra Serien. B. I. 1873. Stockholm 1876.

The Connecticut Academy of Arts and Sciences, New Haven.

280. Transactions. Vol. III. P. 1. New Haven 1876.

The California Academy of Sciences, San Francisco.

281. Proceedings. Vol. V. P. 3. 1874. San Francisco 1875.

Der Verein für Geschichte des Bodensees und seiner Umgebung, Friederichshafen, Württemberg.

282. Schriften. Heft 6. Lindau 1875.

Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.

283. Korrespondenzblatt. 1876. Nr. 5—6.

Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.

284. Sitzungsberichte. Philos.-philol.-hist. Classe. 1876. B. I. H. 1. — Math.-phys. Classe. 1876. H. 1. München 1876.

Die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

285. Abhandlungen. 1875. Berlin 1876. 4to.
 286. Monatsbericht. März & April 1876. Berlin 1876.

Die Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

287. Abhandlungen. Philos.-hist. Classe. B. VI. No. 6. B. VII. No. 2—4. — Math.-phys. Cl. B. X. No. 7—9. B. XI. Nr. 1—5. Leipzig 1874—1875.
288. Berichte. Philol.-hist. Cl. 1873, 1874 & 1875, 1. — Math.-phys. Classe. 1873, 3—7. 1874, 1—5. 1875, 1. Leipzig 1874—75.

La Société Botanique de France, Paris.

289. Bulletin. T. XX. Table alphabétique. T. XXI. 1874. Session extraord. à Gap. T. XXII. 1875. Comptes rendus, 3. T. XXIII. 1876. Comptes rendus, 1. Paris.

La Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.

290. Procès-verbaux. II^e Série. T. I. P. XIII—XXVIII.

La Stazione Zoologica di Napoli.

291. Erster Jahresbericht. Leipzig 1876.

Il Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia.

292. Atti. Serie V. T. I. Disp. 10. T. II. Disp. 1—3. Venezia 1874—76.

L'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

293. Memorie. Serie III. T. V. Fasc. 1—4. Bologna 1874—75. 4to.
294. Rendiconto. Anno 1874—75. Bologna 1875.

Il Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano.

295. Memorie. Classe di Lettere e Scienze Morali e Politiche. Vol. XIII. Fasc. 2. — Classe di Scienze Matematiche e Naturali. Vol. XIII. Fasc. 2. Milano 1875. 4to.
296. Rendiconti. Serie II. Vol. VII. Fasc. 17—20. Vol. VIII. Fasc. 1—20. Milano 1874—75.

La Direzione del Cosmos (Sign. G. Cora), 17 Via della Provvidenza, Torino.

297. Cosmos. Vol. III. N. 8. Torino 1875—76. 4to.

La Società Geografica Italiana, Roma.

298. Bollettino. Vol. XIII. Fasc. 5. Roma 1876.

La Società Entomologica Italiana, Firenze.

299. Resoconti. 1876. Firenze 1876.

Il Sign. Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

300. Rivista scientifico-industriale. Aprile & Maggio 1876.
Firenze.

Die Kais.-Kön. Geologische Reichs-Anstalt in Wien.

301. Verhandlungen. 1876. Nos 1—6. 4to.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

302. Atti e Memorie. Maggio e Giugno 1876.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

303. Bulletin météorologique du Nord. Mai & juin 1876. —
Vejroversigt. Maj 1876.

L'Observatoire Royal de Bruxelles.

304. Annales. Mai & juin. 1876.

La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.

305. Compte-rendu. Série II. N° 26.

*Dr. Gustavus Hinrichs, Professor in the University of Iowa,
Davenport.*

306. Iowa Weather Review. 1876. No. 4—5.

The Peabody Institute of the City of Baltimore, Maryland.

307. Ninth Report. Baltimore 1876.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

308. Iron. Nrs. 177—183.

Die Kais. Kön. Sternwarte zu Prag.

309. Beobachtungen 1875. Prag 1876. 4to.

Dr. A. von Kölliker, Professor an der Universität Würzburg.

310. Ueber die Entwicklung der Graaf'schen Follikel der
Säugethiere. (Phys.-med. Ges. Verh. N. F. B. VIII.)

Die Universität zu Kiel.

311. Schriften. 1875. B. XXII. Kiel 1876. 4to.

Der Naturwissenschaftliche Verein für Schleswig-Holstein, Kiel.

312. Schriften. B. II. H. 1. Kiel 1876.

Mr. Bernard Quaritch, Bookseller, 15 Piccadilly, London. W.

313. 2 Bogkataloger.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

314. Astronomische Nachrichten Nr. 2094—2097.

Afgivet umiddelbart til Bibliotheket den 10^{de} August.

Fra:

The Boston Society of Natural History, Boston, Mass.

315. Memoirs. Vol. II. P. IV. No. 2—4. Boston 1875—76. Fol.

316. Proceedings. Vol. XVII. P. 3—4. Vol. XVIII. P. 1—2. Boston 1875—76.

317. Occasional Papers. II. Boston 1875.

Lieut. George M. Wheeler, Corps of Engineers, U. S. Army, Washington.

318. Annual report upon the geographical explorations etc. in California, Nevada etc., by G. Wheeler. Washington 1875.

The Orleans County Society of Natural Sciences, Newport, Orleans County, Vermont.

319. Archives of Science. Vol. I. Nos. 8—9. 1874.

320. Vermont Medical Journal. Vol. I. Nos. 1—2. Burlington. 1874.

The Buffalo Society of Natural Sciences, Buffalo, N. Y. State.

321. Bulletin. Vol. III. Nos. 1—2. Buffalo 1876.

322. G. Kittredge: The earth's interior. Buffalo 1876.

The American Academy of Arts and Sciences, Boston, Mass.

323. The complete works of Count Rumford. Vol. IV. Boston 1875.

U. S. Survey of the Territories, F. V. Hayden, Geologist-in-Charge, Washington.

- 324. Report. Vol. II. Washington 1875. 4to.
- 325. Annual Report: Colorado and parts of adjacent Territories. Washington 1876.
- 326. Bulletin. Vol. II. No. 2. Washington 1876.

The Peabody Academy of Science, Salem, Mass.

- 327. Memoirs. Vol. I. No. 4. Salem 1875. Fol.
- 328. Sixth annual report for 1873. Salem 1874.
- 329. The American Naturalist. Vol. VIII. Nos. 2—12. Vol. IX. Nos. 1—12. Salem 1874—75.

John Robinson, Esq.

- 330. Check list of the ferns of N. America. North of Mexico. Published for J. Robinson. Salem 1873.

The Essex Institute, Salem, Massachusetts.

- 331. Catalogue of paintings, bronzes etc. exhibited by the Institute Novb. 1875. Salem 1875.

The American Philosophical Society for promoting useful knowledge, Philadelphia, Penns.

- 332. Proceedings. Vol. XIV. No. 95. Philadelphia 1875.

Professor James D. Dana, B. Silliman, and E. S. Dana, New Haven, Conn.

- 333. The American Journal. 3^d Ser. Vol X. Nos. 59—60 & suppl. Vol. XI. Nos. 61—65. New Haven 1875—76.

The Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College, Boston, Mass.

- 334. Illustrated Catalogue. No. VIII. Cambridge 1875. 4to.
- 335. Annual Report for 1874. Boston 1875.

The American Association for the Advancement of Science, Cambridge, Mass.

- 336. Memoirs. I. Salem 1875. 4to.

U. S. Naval Observatory, Superintendent Admiral B. F. Sands, Washington.

- 337. Observations 1873. Washington 1875. 4to.

W. H. Dall, Acting Assistant, U. S. Coast Survey, Washington.

338. Reports on Mt. St. Elias and on the coast of Alaska, by W. H. Dall. (Coast Survey Report 1873.) 4to.

The Smithsonian Institution, Washington.

339. Transactions of the American Medical Association. Vol. XXVI. Philadelphia 1875.

Dr. Gustavus Hinrichs, Professor in the University of Iowa-City, Iowa.

340. Meteorological Observations 1875. Iowa 1875.
 341. The great Iowa meteor, by G. Hinrichs. New York 1875.
 342. Six notes de chimie moléculaire sur la rotation des molécules, par G. Hinrichs. Paris 1873—75. 4to. (Comptes rendus de l'Ac. des Sc.).
 343. Iowa weather review. Nos. 1—2. 1875. 4to.

The Royal Geographical Society of London.

344. Journal. Vol. 45. 1875. London.
 345. Proceedings. Vol. XX. Nos. 1—4. London 1875—76.

The Geological Society of London.

346. The Quarterly Journal. Vol. XXXII. P. 1—2. No. 125—126. London 1876.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

347. Iron. Nos. 184.

Il Real Comitato Geologico d'Italia, Roma.

348. Bollettino. 1876. No. 5 e 6. Roma 1876.

La Società Italiana di Antropologia e di Etnologia, Firenze.

349. Archivio. Vol. VI. Fasc. 1. Firenze 1876.

La Società Malacologica Italiana, Pisa.

350. Bullettino. Vol. II. 1876. Fasc. 1. Pisa 1876.

M. Garcin de Tassy, de l'Institut, Paris.

351. Allégories, récits poétiques et chants populaires traduits de l'arabe, du persan, de l'hindoustani et du turc par G. de Tassy. II^e Ed. Paris 1876.

M. P. Trémaux, Lauréat de l'Institut, Paris.

352. Principe universel du mouvement, par P. Trémaux. Paris 1876.

The Geological Survey of India, Calcutta.

353. Memoirs. Vol. XI. P. 2. Calcutta 1875.
 354. Palæontologia Indica. Ser. IX. P. 4. Calcutta 1875. Fol.
 355. Records. Vol. IX. P. 1. 1876.

Der Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung zu Hamburg.

356. Verhandlungen. 1875. B. II. Hamburg 1876.

Die Kön. Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

357. Monatsbericht. Mai 1876. Berlin 1876.

Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.

358. Sitzungsberichte. Philos.-philol.-hist. Cl. 1876. Bd. I. H. 2. München 1876.

Senhor Joaquim Filipe Nerj Delgado, Presidente da Commissão Geologica de Portugal, Lisboa.

359. Da existencia do homem no nosso solo em tempos mui remotos. Primeiro opusculo. Por J. F. N. Delgado. Lisboa 1867. 4to.

Die Kais.-Kön. Geographische Gesellschaft in Wien.

360. Mittheilungen. 1875. B. XVIII. (N. F. VIII). Wien 1875.

Die Kais.-Kön. Zoologisch-Botanische Gesellschaft in Wien.

361. Verhandlungen. 1875. B. XXV. Wien 1876.
 362. Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens der Gesellschaft. Wien 1876. 4to.

La Società Adriatica di Scienze Naturali in Trieste.

363. Bollettino. Annata II. No. 1. Trieste 1876.

Kongliga Vetenskaps Akademien i Stockholm.

364. Öfversigt. 1876. No. 1. Stockholm 1876.

La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.

365. Comptes-rendus. Série II. No. 27. 1876.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

366. Vejrovsigt. Juni 1876.

Messrs. Trübner & Co., Ludgate Hill 57, London.

367. Literary Record. Nos. 116 & 117.

I Mødet den 13^{de} Oktober

fremlagdes fra:

*Maharājādhirāja Mahtāb chand Bāhādur i Burdwan, Bengalen,
de paa hans Foranstaltning og Bekostning udgivne Bind:*

368. Mahābhārata, Sanskrit Text. 4 Voll. (1—11 Bog). 1862—73. 4to.

369. Mahābhārata, Bengalsk Oversættelse. 4 Voll. (1—11 Bog). 1862—72. 4to.

370. Rāmāyana, Sanskrit Text. 1 Vol. (1—2 Bog). 1866—71.

371. Rāmāyana, Bengalsk Oversættelse. 2 Voll. (1—2 Bog). 1866—71.

Kongl. Carolinska Universitetet i Lund.

372. Års-Skrift. T. XI. 1874. Lund 1874—75. 4to.

373. Universitets-Bibliotekets Accessions-Katalog. 1875. Lund 1876.

M. É. Littré, de l'Académie Française, Paris.

374. Fragments de philosophie positive. Paris 1876.

La Société des Sciences de Nancy.

375. Bulletin. 1873. 1874, 1^e Partie. Nancy 1874—75.

La Société Industrielle et Agricole d'Angers.

376. Bulletin 1876. 1^{er} Semestre. Angers 1876.

Societatea Academica Romana, Bucuresci.

377. Annalile. T. VIII. Bucuresci 1875.

378. A. T. Laurianu si J. C. Massimu: Dictionariulu limbei române. T. II. J-Z. Bucuresci 1876.

Bureauet for Norges Geografiske Opmaaling (Generalstabens Topografiske Afdeling) i Kristiania.

379. Aarvog for Handelsmarinen. Aarg I—V & VI, 1. 1870—1875. Kristiania.
380. Den norske Lods. H. 1, 3, 4, 8. Kristiania 1867—71.
381. Beskrivelse af Tromsø Amt. Kristiania 1874.
382. 40 Blade Landkort, 58 Blade Søkort & 11 Blade Kort over Havbanker udenfor den norske Kyst.

L'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.

383. Mémoires. Série VII. T. XXII. N° 4—10. T. XXIII. N° 1. St.-Pétersbourg 1875. 4to.
384. Bulletin. T. XX. N° 3—4. T. XXI. N° 1—5. T. XXII. N° 1—2. St.-Pétersbourg 1875—76. 4to.

L'Observatoire Physique Central de Russie à St.-Pétersbourg.

385. Repertorium für Meteorologie. B. V. H. 1. St.-Petersburg 1876. 4to.

La Société Impériale des Naturalistes de Moscou.

386. Bulletin. Année 1876. N° 1. Moscou 1876.

La Società Geografica Italiana, Roma.

387. Bollettino. Serie II. Vol. XIII. Fasc. 6—7. Roma 1876.

La Società Entomologica Italiana, Firenze.

388. Bullettino. Anno VIII. Trimestre 2. Firenze 1876.

Il Sign. Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

389. Rivista scientifico-industriale. Giugno—Luglio 1876. Firenze 1876.

Die Kais. Kön. Geologische Reichsanstalt in Wien.

390. Jahrbuch. Jahrg. 1876. B. XXVI. N° 2. Wien 1876. 4to.
391. Verhandlungen. 1876. N° 7—10. Wien 1876. 4to.

Die Anthropologische Gesellschaft in Wien.

392. Mittheilungen. B. VI. Nr. 3—4. Wien 1876.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

393. Atti e Memorie. 1876. N. 7—8.

*Het Koninklijk Nederlandsch Ministerie van Binnenlandsche Zaken,
s'Gravenhage.*

394. Pinacographia door S. C. Snellen van Vollenhoven. P. III.
Afl. 3. s'Gravenhage 1876. 4to.

La Société Néerlandaise pour le Progrès de l'Industrie à Harlem.

395. Adresse à S. M. le Roi. Harlem 1876.

L'Observatoire Royal de Bruxelles.

396. Annales. Juillet & août 1876. 4to.

M. E. Quetelet, Membre de l'Acad. R. de Bruxelles.

397. E. Quetelet: La tempête du 12 mars 1876. (Bull. de
l'Acad. T. XLI).

La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.

398. Compte-rendu. Série II. N° 28—29.

Professor Joseph Prestwich, F. R. S., Oxford.

399. Tables of temperatures of the sea, by J. Prestwich. (Trans.
Roy. Soc., vol. 165). 4to.

Capitain W. J. Wyatt, London.

400. The history of Prussia, by W. J. Wyatt. Voll. 1—2.
London 1876.
401. The political position of England, by W. J. Wyatt. Lon-
don 1874.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

402. Iron. N° 185—193.

Dr. Alex. Milton Ross, Toronto, Canada.

403. The birds of Canada, by A. M. Ross. 2^d Ed. Toronto
1872.

*Dr. Gustavus Hinrichs, Professor in the University of Iowa,
Iowa City.*

404. Iowa weather review. N° 6. 1876.

Die Naturforschende Gesellschaft in Zürich.

405. Vierteljahrsschrift. Jahrg. XIX—XX. Zürich 1874—75.

Die Astronomische Gesellschaft, Leipzig.

406. Vierteljahrsschrift. Jahrg. XI. H. 3. Leipzig 1876.

Die Physikalisch-Medicinische Gesellschaft in Würzburg.

407. Verhandlungen. N. F. B. IX. H. 3—4. B. X. H. 1—2.
Würzburg 1876.

Dr. A. von Kölliker, Professor an der Universität Würzburg.

408. Ueber die Placenta der Gattung *Tragul*, von A. v. Kölliker.
(Würzb. phys.-med. Ges. N. F. B. X).

Dr. H. Schubert in Hamburg.

409. Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung, von H. Schubert. (Math. Ann. B. X).

Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.

410. Korrespondenzblatt. 1876. Nr. 7—8.

Det Danske Meteorologiske Institut i Kjøbenhavn.

411. Bulletin météorologique du Nord. Juillet & août 1876.
— Vejrovsigt. Juli og August 1876.

The Meteorological Committee of the Royal Society of London.

412. Report 1875. London 1876.

A Comissão Geologica do Imperio do Brazil, Rio de Janeiro.

413. Archivos do Museu Nacional. Vol. I. Trim. 1. 1876.
Rio de Janeiro 1876. 4to.

La Société Botanique de France, Paris.

414. Bulletin. T. XXI. Table alphab. T. XXIII. 1876.
Comptes-rendus, 2. — Revue bibliographique, A. Paris.

Herr Redakteur Robert Grassmann, Stettin.

415. Denklehre. Wissenslehre. Erkenntnisslehre. Weisheitslehre. Von R. Grassmann. 4 voll. Stettin 1875—76.

The Department of Public Parks, City of New York.

416. Report of the Director of the Central Park Menagerie.
New York 1876.

Mr. Bernard Quaritch, 15 Piccadilly, London W.

417. En Bogkatalog.

Librairie Gauthier-Villars, Quai des Augustins, Paris.

418. Bulletin. Trimestre IV. 1875.

Messrs. Trübner & Co., 57 Ludgate Hill, London.

419. Literary Record. Nos. 118 & 119.

La Direzione del Cosmos (Sign. Guido Cora), Via Provvidenza 17, Torino.

420. Cosmos. Vol. III. 1875—76. IX. Torino 1876. 4to.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

421. Astronomische Nachrichten. Nr. 2098—2104.

I Mødet den 27^{de} Oktober

fra:

La Société Nationale des Sciences Naturelles de Cherbourg.

422. Mémoires. T. XIX. Cherbourg 1875.

M. H. Tarry, Membre de la Société Météorologique de France, Paris.

423. Histoire de l'atmosphère en mai & juin 1876, par H. Tarry. Saint-Denis 1876. (Extr. du journal les Mondes).

Il Real Comitato Geologico d'Italia, Roma.

424. Bollettino. 1876. N° 7 e 8. Roma 1876.

Professor J. G. Agardh, Selskabets udenl. Medlem, i Lund.

425. Species, genera et ordines algarum, auct. J. G. Agardh. Vol. III. Lundæ 1876.

The Linnean Society of London.

426. Transactions. Second Series. Zoology. Vol. I. P. 2—3. Botany. Vol. I. P. 2—3. — General Index to Vols. XXVI—XXX. London 1875—76. 4to.

427. Journal. Zoology. XII. Nos. 60—63. — Botany. Vol. XV. Nos. 81—84. London 1875—76.

428. Proceedings. 1874—75. London 1875.

429. Additions to the Library. 1874—75.

Die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

430. Monatsbericht. Juni 1876. Berlin 1876.

Die Physikalisch-Ökonomische Gesellschaft zu Königsberg.

431. Schriften. Jahrg. XVI. 1875. Abth. 1—2. Königsberg 1875—76. 4to.
 432. Geologische Karte der Provinz Preussen. Blatt 16.

Dr. F. Katter, Gymnasiallehrer in Putbus.

433. Entomologische Nachrichten. Jahrg. II. H. 5 & 7—10. Putbus 1876.

Die Medicinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Jena.

434. Zeitschrift. Bd. X. H. 3. Jena 1876.

Die Schlesische Gesellschaft für Vaterländische Cultur, Breslau.

435. 53^{ster} Jahresbericht. Breslau 1876.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

436. Atti e Memorie. 1876. N. 9.

M. Félix Plateau, Professeur à l'Université de Gand.

437. Les phénomènes de la digestion etc. chez les myriapodes de Belgique, par F. Plateau. Bruxelles 1876. 4to. (Mém. de l'Ac. R. de B. T. XLII).
 438. Les phénomènes de la digestion chez la blatte américaine, par F. Plateau. Bruxelles 1876. (Bull. de l'Ac. R. de B).

Il Sign. Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

439. Rivista scientifico-industriale. Agosto 1876.

Het Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Batavia.

440. Notulen van de Vergaderingen. Deel XIII. 1875. No. 3 & 4. Deel XIV. 1876. N° 1. Batavia 1876.
 441. Tijdschrift voor indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXIII. Afl. 2—4. Batavia 1875—76.
 442. Kawi Oorkonden in facsimile, met inleiding en transcriptie van Dr. A. B. Cohen Stuart. Leiden 1875. 4to.

The British Association for the Advancement of Science.

443. Report of the 45th meeting. London 1876.

Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.

444. Korrespondenzblatt. 1876. Nr. 9.

L'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

445. Memorie. Serie III. T. VI. Fasc. 1—4. Bologna 1875—76. 4to.

446. Rendiconto. 1875—76. Bologna 1876.

Öfverstyrelsen öfver Hospitalen, Stockholm.

447. Berättelse för år 1874. Stockholm 1876. 4to.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

448. Bulletin météorologique du Nord. Septembre 1876.

La Librairie Gauthier-Villars, Quai des Augustins 55, Paris.

449. Bulletin. Trimestres 1—2, 1876.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

450. Iron. Nos. 194—197.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

451. Astronomische Nachrichten. Nr. 2105—2107.

I Mødet den 10^{de} November

fra:

M. E. Hébert, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

452. Classification du crétaé supérieur, par E. Hébert. (Bull. de la Soc. géol. de France. Série III, T. 3). Paris 1875.

453. Hébert et Munier: Réponse à M. de Loriol. — Hébert: Deux espèces d'Hemipneustes. (Bull. de la Soc. géol. de Fr. Série III, T. 3). Paris 1875.

454. Ondulations de la craie dans le nord de la France, par E. Hébert. (Annales des Sciences géol. T. VII, Nr. 2). Paris 1876.

La Société des Sciences de Nancy.

455. Bulletin, Série II. T. I. Fasc. 3. 1875. Paris 1876.

La Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne.

456. Bulletin. 2^e S. Vol. XIV. Nr. 76. Lausanne 1876.

La Direzione del Cosmos (Sign. Guido Cora) Via Provvidenza 17, Torino.

457. Cosmos. Vol. III, 1875—76. N. X. Torino 1876. 4to.

La Società Entomologica Italiana, Firenze.

458. Bullettino. Anno 8°. Trimestre III. Firenze 1876.

459. Catalogo della collezione di insetti del R. Museo di Firenze. Serie I^a. Coleotteri. Firenze 1876.

A Comissão Central Permanente de Geographia, Lisboa.

460. Constituição e regulamento geral. Lisboa 1876. 2 Expl.

L'Observatoire Royal de Bruxelles.

461. Annales. Septembre 1876. 4to.

La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.

462. Compte-rendu. Série II. No. 30.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

463. Iron. Nos. 198—199.

La Società Adriatica di Scienze Naturali in Trieste.

464. Bollettino. Annata II. Nro. 2. Trieste 1876.

Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademien i Stockholm.

465. Öfversigt 1876. Nr. 2—5. Stockholm 1876.

466. Astronomiska iakttagelser på Stockholms Observatorium. B. I. H. 1. Stockholm 1876. 4to.

Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.

467. Sitzungsberichte. Philos.-philol.-hist. Classe. 1876. B. I. H. 3. München 1876.

Die Physikalisch-Medicinische Societät zu Erlangen.

468. Sitzungsberichte. Heft 8. Erlangen 1876.

Die Medicinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Jena.

469. Zeitschrift. B. X. II. Supplement-Heft. Jena 1876.

Die Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Giessen.

470. 15ter Bericht. Giessen 1876.

Die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft zu Leipzig.

471. R. Hassencamp: Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. Leipzig 1876.

472. A. Leskien: Die Declination im Slavisch-litauischen und Germanischen. Leipzig 1876.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

473. Vejrovsigt. September 1876.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

474. Astronomische Nachrichten. Nr. 2108.

I Mødet den 24^{de} November

fra:

L'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Bruxelles.

475. Mémoires. T. XLI. P. 1—2. Bruxelles 1875—76. 4^{to}.
 476. Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers. T. XXXIX. P. 1. Bruxelles 1876. 4^{to}.
 477. Mémoires couronnés et autres mémoires. Coll. in-8^o. T. XXIV—XXVI. Bruxelles 1875.
 478. Bulletins. T. XXXVIII—XLI. Bruxelles 1874—76.
 479. Annuaires. 1875—76. Bruxelles 1875—76.
 480. Notices concernant les membres et les correspondants de l'Académie. 1874. Bruxelles 1875.
 481. Biographie nationale. T. V. P. 1—2. Bruxelles 1875—76.
 482. Collection de chroniques belges inédites: La Bibliothèque Nationale à Paris. Notices et extraits concernant l'histoire de Belgique. T. I. Bruxelles 1875. — Les Bibliothèques de Madrid et de l'Escurial. Notices et extraits etc. Bruxelles 1875. — Voyages des souverains des Pays-Bas. T. I. Bruxelles 1876. — Chroniques relatives à l'histoire de la Belgique sous les ducs de Bourgogne. Textes latins. T. III. Bruxelles 1876. — Cartulaire de l'abbaye de Saint-Trond. T. II. Bruxelles 1874. — Codex Dunensis. Bruxellis 1875. 6 voll. in-4^o.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

483. Atti e Memorie. 1870. Nr. 1—15. 1871. N. 1—4. Titolo ed indice. 1874. Titolo ed indice. 1876. Nr. 10.

La Società Italiana di Antropologia e di Etnologia, Firenze.

484. Archivio. Vol. VI. Fasc. 2. Firenze 1876.

Il Sign. Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

485. Rivista scientifico-industriale. Settembre 1876. Firenze.

Die Kön. Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

486. Monatsbericht. Juli 1876. Berlin 1876.

The Royal Astronomical Society of London.

487. Monthly notices. Vol. XXXVI. N^o. 9.

Mr. Bernard Quaritch, Bookseller, 15 Piccadilly, London W.

488. En Bogkatalog.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

489. Astronomische Nachrichten Nr. 2109—2110.

I Mødet den 8^{de} December

fra:

L'Accademia delle Scienze di Torino.

490. Memorie. Serie seconda. T. XXVIII. Torino 1876. 4^{to}.

491. Atti. Vol. XI. 1875—76. Disp. 1—6. Torino.

L'Osservatorio della Regia Università di Torino.

492. Bollettino. Anni IX e X. Torino 1875—76. Fol. obl.

Il Real Comitato Geologico d'Italia, Roma.

493. Bollettino. 1876. N^o 9 e 10. Roma 1876.

Il Sign. Conte Guido Vimercati, Ingegnere Civile, Firenze.

494. Rivista scientifico-industriale. Ottobre 1876. Firenze 1876.

La Société des Sciences de Nancy.

495. Bulletin. Série II. T. II. Fasc. 4. Paris 1876.

La Société Botanique de France, Paris.

496. Bulletin. T. XXIII. 1876. Revue bibliogr., B. Paris.

Finska Vetenskaps-Societeten i Helsingfors.

497. Öfversigt. XVII. 1874—75. Helsingfors 1875.

498. Observations météorologiques. 1873. Helsingfors 1875.
499. Bidrag till Kännedom af Finlands Natur och Folk. H. XXIV. Helsingfors 1875.
- Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.*
500. Sitzungsberichte. Philos.-philol.-hist. Cl. 1876. Bd. I. H. 4. — Math.-phys. Cl. 1876. H. 2. München 1876.
- Die Medicinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Jena.*
501. Zeitschrift. B. X. H. 4. Jena 1876.
- Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.*
502. Korrespondenzblatt. 1876. Nr. 10.
- Leeds Philosophical and Literary Society.*
503. 56th Report. 1875—76. Leeds 1876.
- The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.*
504. Iron. Nos. 200—202.
- Societatea Academica Romana, Bucuresci.*
505. Publicatiune de concursurile. 1876.
- Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.*
506. Bulletin météorologique du Nord. Octb. 1876. — Vejr-oversigt. Okt. 1876.
- Dr. H. Schubert in Hamburg.*
507. A. Hurwitz und H. Schubert: Ueber den Chasles'schen Satz $\alpha\mu + \beta\nu$.
- George Biddell Airy, Astronomer Royal, Greenwich.*
508. P. A. Hansen: Tables de la lune. Londres 1857. 4^{to}. Avec les Errata, par J. R. Hind. 1862. 8^{vo}.
- La Società Toscana di Scienze Naturali, Pisa.*
509. Atti. Vol. I. Fasc. 3^o. Vol. II. Fasc. 1^o. Pisa 1876.
- Det Astronomiske Observatorium i Kiel.*
510. Astronomische Nachrichten. Nr. 2111.

I Mødet den 22^{de} December

fra:

Det Kongelige Norske Frederiks Universitet i Kristiania.

- 511. Aarsberetning for 1875. Christiania 1876.
- 512. Index scholarum. 1876. I. Christiania 1876.
- 513. C. de Seue: Windrosen des südl. Norwegens. Kristiania 1876. 4to. Universitets-Program.
- 514. Guldberg & Mohn: Mouvements de l'atmosphère. I. Christiania 1876. 4to. Universitets-Program.
- 515. O. J. Broch: Norge og det norske Folk. Kristiania 1876.
- 516. A. Blytt: Norges Flora. 3dje Del. Christiania 1876.
- 517. H. Siebke: Enumeratio insectorum norvegicorum. Fasc. III. Christiania 1876. Universitets-Program.
- 518. E. Blix: Begreberne Herre og Fyrste i de semitiske Sprog. Kristiania 1876.
- 519. Universitets- og Skole-Annaler. 3dje Række. XIII, 3—4 og XIV, 1—2. Christiania 1875—76.
- 520. H. Blom: Russisk Sproglære. Kristiania 1876.
- 521. Norwegian special catalogue for the international Exhibition at Philadelphia 1876. Christiania 1876.
- 522. Archiv for Matematik og Naturvidenskab. B. I. H. 1—3. Kristiania 1876.
- 523. Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. B. XXII. H. 2. Christiania 1876.

Videnskabs-Selskabet i Kristiania.

- 524. Forhandlinger. 1875. Christiania 1876.

U. S. War Department, Surgeon General's Office, Washington D. C.

- 525. Medical and surgical history of the war of the Rebellion. Part II. Vol. II. Surgical History. Washington 1876. 4to.
- 526. Medical and anthropological statistics of the Provost-Marshal-General's Bureau. Vol. I—II. Washington 1875. 4to.

The Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College, Cambridge, Mass.

527. Memoirs. Vol. II. No. 9. Cambridge 1876. 4to.
 528. Bulletin. Vol. III. Nos. 11—16. Cambridge 1876.

The Meteorological Committee of the Royal Society of London.

529. Contribution to the Meteorology of Japan. London 1876. 4to.
 530. Report. 1866—75. (Proc. R. Soc. No. 166. 1876).

La Société Impériale des Naturalistes de Moscou.

531. Bulletin. 1876. N° 2. Moscou 1876.

Die Kais.-Kön. Geologische Reichsanstalt in Wien.

532. Jahrbuch. Jahrg. 1876. B. XXVI. Nr. 3. Wien. 4to.
 533. Verhandlungen. 1876. N° 11—13. Wien. 4to.
 534. Catalog der Ausstellungs-Gegenstände der Reichsanstalt bei der Wiener Weltausstellung 1873. Wien.

Die Kön. Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

535. Monatsbericht. August 1876. Berlin 1876.

Dr. F. Katter, Gymnasiallehrer in Putbus.

536. Entomologische Nachrichten. Jahrg. II. H. 5, 7 & 8—12. Putbus 1876.

Dr. Gustavus Hinrichs, Professor in the University of Iowa, Iowa-City.

537. Weather Review. 1876. Nos. 3 & 6.

La Société Entomologique de Belgique, Bruxelles.

538. Comptes-rendus. Série II. N° 31.

La Società Reale di Napoli.

539. Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Vol. VI. Napoli 1875. 4to.
 540. Rendiconto della R. Acc. delle Sc. fis. e matem. Anni XII—XIII—XIV. Napoli 1873—75. 4to.

La Direzione del Cosmos (Sign. G. Cora), 17 Via della Provvidenza, Torino.

541. Cosmos. Vol. III. 1875—76. XI. Torino 1876.

La Société Géologique de France, Paris.

542. Bulletin. 3^e Série. T. IV. Nr. 6. Paris 1875—76.

L'Observatoire Royal de Bruxelles.

543. Annales. Octobre 1876. 4to.

Hr. Rektor Jón Thorkelsson, Selsk.'s Medl., Reykjavik.

544. Supplement til islandske Ordbøger, af Jón Thorkelsson. Reykjavik 1876.

L'I. R. Società Agraria di Gorizia.

545. Atti e Memorie. 1876. N. 11.

Die Sternwarte zu Leipzig.

546. Protokolle der Verhandlungen des permanenten Comités, eingesetzt von dem ersten Meteorologen-Congress in Wien 1873. Sitzungen in London 1876. Leipzig. 4to.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn.

547. Bulletin météorologique du Nord. Novembre 1876.

The Royal Astronomical Society, London.

548. Monthly Notices. Vol. XXXVII. No. 4 November 1876.

The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.

549. Iron. Nos. 203—205.

Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben

550. Korrespondenzblatt. 1876. Nr. 11.

Messrs. Trübner & Co., 57 & 59 Ludgate Hill, London.

551. Literary Record. Nos. 120—122.

Mr. Bernard Quaritch, Bookseller, 15 Piccadilly, London W.

552. En Bogkatalog.

Det Astronomiske Observatorium i Kiel.

553. Astronomische Nachrichten. Nr. 2112.

(Fortsættelse af Boglisten for 1876.)

O v e r s i g t

over

de lærde Selskaber, videnskabelige Anstalter
og offentlige Bestyrelser, fra hvilke det K. D. Viden-
skabernes Selskab i Aaret 1876 har modtaget Skrifter

samt

alfabetisk Fortegnelse over de Enkeltmænd, der i samme Tids-
rum have indsendt Skrifter til Selskabet, Alt med Henvi-
sing til foranstaaende Boglistes Numere.

Danmark.

Generalstabens topografiske Afdeling, ved Chefen, Hr. Oberst Kling-
sey. Nr. 54.

Det Danske Meteorologiske Institut, Kjøbenhavn. Nr. 7, 46, 70,
95, 121, 167, 202, 256, 303, 366, 411, 448, 473, 506, 547.

Norge.

Det Kgl. Norske Frederiks Universitet i Kristiania. Nr. 97—104,
172—176, 511—523.

Videnskabs-Selskabet i Kristiania. Nr. 106, 524.

Den Fysiografiske Forening i Kristiania. Nr. 107, 179.

Bureauet for Norges Geografiske Opmaaling i Kristiania. Nr. 379
—382.

Det Meteorologiske Institut i Kristiania. Nr. 105.

Det Kgl. Norske Videnskabs-Selskab i Thronhjelm. Nr. 108, 109.

Bergens Museum. Nr. 180.

Sverig.

- Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademien i Stockholm. Nr. 276—279,
364, 465, 466.
- Byrån för Sveriges Geologiska Undersökning, Stockholm. Nr. 48—51.
- Öfverstyrelsen öfver Hospitalen, Stockholm. Nr. 447.
- Universitetet i Lund. Nr. 372, 373.

Rusland.

- L'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg. Nr. 269, 383, 384.
- L'Observatoire Physique Central de Russie à St.-Pétersbourg. Nr.
113, 268, 385.
- Finska Vetenskaps-Societeten, Helsingfors. Nr. 497—499.
- La Société Impériale des Naturalistes de Moscou. Nr. 38, 169,
235, 386, 531.

Storbritannien og Irland.

- The Royal Society of London. Nr. 271—274.
- The Meteorological Committee of the Royal Society, London. Nr.
212, 213, 412, 529, 530.
- The British Association for the Advancement of Science, London.
Nr. 443.
- The Royal Observatory, Greenwich. Nr. 209.
- The Royal Geographical Society, London. Nr. 344, 345.
- The Royal Astronomical Society of London. Nr. 133, 163, 214,
275, 487, 548.
- The Geological Society of London. Nr. 1, 2, 346.
- The Zoological Society of London. Nr. 204—206, 210, 211.
- The Linnean Society of London. Nr. 426—429.
- The Editors of Iron, 12 Fetter Lane, Fleet Street, London E. C.
Nr. 67, 87, 115, 135, 166, 197, 215, 308, 347, 402, 450,
463, 504, 549.
- The Trustees of the Radcliffe Observatory, Oxford. Nr. 149.
- Leeds Philosophical and Literary Society. Nr. 503.
- The Literary and Philosophical Society of Liverpool. Nr. 84.
- The Royal Physical Society of Edinburgh. Nr. 3.
- The Scottish Meteorological Society, Edinburgh. Nr. 134.

The Royal Dublin Society. Nr. 207.

The Royal Geological Society of Ireland, Dublin. Nr. 86.

Nederlandene.

Het Koninklijk Nederlandsch Ministerie van Binnenlandsche Zaken,
's Gravenhage. Nr. 61, 266, 394.

De Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
Nr. 189—194.

De Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem.
Nr. 263, 264.

De Directie van Teylers Stichting te Haarlem. Nr. 259, 260.

La Société Néerlandaise pour le Progrès de l'Industrie à Harlem.
Nr. 395.

Universitetet i Leiden. Nr. 261.

Die Sternwarte in Leiden. Nr. 262.

De Nederlandsche Botanische Vereeniging te Leiden. Nr. 265.

Belgien.

L'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de
Belgique à Bruxelles. Nr. 475—482.

L'Observatoire Royal de Bruxelles. Nr. 15, 36, 165, 230, 304,
396, 461, 543.

La Société Entomologique de Belgique à Bruxelles. Nr. 35, 69,
112, 170, 228, 229, 305, 365, 398, 462, 538.

Frankrig.

Le Museum d'Histoire Naturelle de Paris. Nr. 125.

La Société Géologique de France, Paris. Nr. 542.

La Société Botanique de France, Paris. Nr. 111, 187, 188, 289,
441, 496.

La Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.
Nr. 80, 81, 290.

La Société Nationale des Sciences Naturelles de Cherbourg. Nr. 422.

L'Académie des Sciences, de Nancy. Nr. 375, 455, 495.

La Société Industrielle et Agricole d'Angers. Nr. 376.

Schweiz.

La Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne. Nr. 442, 456.

Die Naturforschende Gesellschaft in Zürich. Nr. 405.

Tyskland.

- Die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Nr. 66, 91, 159, 195, 239, 285, 286, 357, 430, 486, 535.
- Die Physikalische Gesellschaft zu Berlin. Nr. 18, 240.
- Der Naturwissenschaftliche Verein zu Bremen. Nr. 242.
- Die Schlesische Gesellschaft für Vaterländische Cultur, Breslau.
Nr. 435.
- Die Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Chemnitz. Nr. 248, 249.
- Die Naturforschende Gesellschaft in Danzig. Nr. 250.
- Die Physikalisch-Medicinische Societät zu Erlangen. Nr. 124, 468.
- Der Verein für Geschichte des Bodensees und seiner Umgebung,
Friedrichshafen, Württemberg. Nr. 282.
- Die Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu
Giessen. Nr. 470.
- Der Naturwissenschaftliche Verein von Neu-Vorpommern und
Rügen, Greifswald. Nr. 241.
- Die Königlische Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Nr. 117, 118.
- Der Naturwissenschaftliche Verein für Sachsen und Thüringen in
Halle. Nr. 181.
- Der Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung zu Hamburg.
Nr. 356.
- Die Medicinisch - Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Jena.
Nr. 140, 245, 434, 469, 501.
- Die Universität zu Kiel. Nr. 311.
- Die Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte,
Kiel. Nr. 251, 252.
- Der Naturwissenschaftliche Verein für Schleswig-Holstein, Kiel.
Nr. 312.
- Det Astronomiske Observatorium i Kiel. Nr. 19, 47, 73, 96, 126,
150, 171, 208, 258, 314, 421, 451, 474, 489, 510, 553.
- Die Physikalisch-Ökonomische Gesellschaft zu Königsberg. Nr. 52,
53, 431, 432.
- Die Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu
Leipzig. Nr. 287, 288.

- Die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig. Nr. 65,
471, 472.
- Die Sternwarte zu Leipzig. Nr. 546.
- Die Astronomische Gesellschaft in Leipzig. Nr. 92, 243, 406.
- Die Kön. Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.
Nr. 43—45, 62, 157, 158, 236—238, 284, 358, 467, 500.
- Der Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.
Nr. 146, 201, 247, 283, 410, 444, 502, 550.
- Die Physikalisch-Medicinische Gesellschaft in Würzburg. Nr. 246,
407.

Østerrig og Ungarn.

- Die Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 151—156.
- Die Kais.-Kön. Geologische Reichsanstalt in Wien. Nr. 56—58,
137, 138, 301, 390, 391, 532—534.
- Die Kais.-Kön. Geographische Gesellschaft in Wien. Nr. 94, 360.
- Die Kais.-Kön. Zoologisch-Botanische Gesellschaft in Wien
Nr. 361, 362.
- Das Kais.-Kön. Mineralogische Museum i Wien. Nr. 119.
- Die Anthropologische Gesellschaft in Wien. Nr. 392.
- Die Kais.-Kön. Sternwarte zu Prag. Nr. 309.
- Der Naturwissenschaftliche Verein für Steiermark, Graz. Nr. 139.
- La Società Adriatica di Scienze Naturali in Trieste. Nr. 10, 144,
363, 464.
- L'I. R. Società Agraria di Gorizia. Nr. 11, 120, 148, 200, 253,
302, 393, 436, 483, 545.

Roumænien.

- Societatea Academica Romana, Bucuresci. Nr. 377, 378, 505.

Italien.

- L'Accademia della Scienze dell'Istituto di Bologna. Nr. 293, 294,
445, 446.
- La Società Entomologica Italiana, Firenze. Nr. 123, 183, 221,
299, 388, 458, 459.

- La Società Italiana di Antropologia e di Etnologia, Firenze.
Nr. 182, 349, 484.
- La Direzione della Rivista scientifico-industriale, Firenze. Nr. 9,
31, 145, 161, 184, 300, 389, 439, 485, 494.
- Il Reale Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, Milano.
Nr. 295, 296.
- La Società Reale di Napoli. Nr. 539, 540.
- La Stazione Zoologica di Napoli. Nr. 291.
- La Società Toscana di Scienze Naturali, Pisa. Nr. 29, 509.
- La Società Malacologica Italiana, Pisa. Nr. 8, 28, 168, 350.
- La Reale Accademia dei Lincei, Roma. Nr. 127.
- Il Real Comitato Geologico d'Italia, Roma. Nr. 55, 143, 220,
348, 424, 493.
- La Società Geografica Italiana, Roma. Nr. 83, 128, 162, 185,
219, 298, 387.
- La Reale Accademia delle Scienze di Torino. Nr. 490, 491.
- Il Regio Osservatorio dell'Università di Torino. Nr. 492.
- La Direzione del Cosmos, Torino. Nr. 12, 30, 186, 297, 420,
457, 541.
- Il Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia.
Nr. 292.

Spanien.

- El Observatorio de Marina de la Ciudad de San Fernando, Cádiz.
Nr. 32, 82.

Portugal.

- A Comissão Central Permanente de Geographia, Lisboa. Nr. 460.

Amerika.

- The American Association for the Advancement of Science. Nr. 336.
- The Peabody Institute of the City of Baltimore. Nr. 307.
- The Boston Society of Natural History, Boston, Mass. Nr. 315
—317.
- The American Academy of Arts and Sciences, Boston, Mass.
Nr. 323.

- The Buffalo Society of Natural Science, Buffalo, New York.
Nr. 321, 322.
- The Museum of Comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Massachusetts. Nr. 164, 334, 335, 527, 528.
- The Connecticut Academy of Arts and Sciences, New Haven.
Nr. 280.
- The Orleans County Society of Natural Sciences, Newport, Orleans County, Vermont. Nr. 319, 320.
- The Department of Public Parks, City of New York. Nr. 416.
- The American Geographical and Statistical Society, Cooper Institute, New York. Nr. 39.
- The American Geographical Society, New York. Nr. 136.
- The American Philosophical Society, for promoting useful knowledge, Philadelphia, Pennsylvania. Nr. 332.
- The Essex Institute, Salem, Mass. Nr. 331.
- The Peabody Academy of Science, Salem, Mass. Nr. 327—329.
- The California Academy of Sciences, San Francisco. Nr. 281.
- The Smithsonian Institution, Washington, Nr. 339.
- U. S. Naval Observatory, Washington. Nr. 337.
- U. S. War Department, Surgeon General's Office, Washington.
Nr. 88, 525, 526.
- U. S. Geological Survey of the Territories, Washington. Nr. 89,
90, 116, 196, 324—326.

El Colegio de Belen de la Compañía de Jesus en la Habana.
Nr. 122.

A Comissão Geologica do Imperio do Brazil, Rio de Janeiro.
Nr. 413.

Asien.

- The Geological Survey of India, Calcutta. Nr. 216, 217, 353—355.
- The Meteorological Committee's Office, Calcutta. Nr. 4—6.
- Het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen,
Batavia. Nr. 40—42, 74—75, 440—442.
- De Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië,
Batavia. Nr. 267.

Afrika.

La Société Khédiviale de Géographie du Caire. Nr. 232, 270.

Australien.

The Otago Museum, Dunedin, New Zealand. Nr. 85.

- Agardh, J. G., Selsk. udl. Medl., Professor i Lund. Nr. 425.
- Airy, G. B., Selsk. udl. Medl., Astronomer Royal, Greenwich.
Nr. 508.
- Amari, Michele, Selsk. udl. Medl., Professor, Senator, Firenze.
Nr. 110.
- Barghon de Fort-Rion, Baron F. de, Versailles. Nr. 33—34.
- Bendz, Dr., H. C. B., Etatsraad, Selsk. Medl., Kjøbenhavn.
Nr. 203.
- Borre, A. Preudhomme de, Conservateur au Musée Royal d'Hist.
naturelle de Bruxelles. Nr. 14.
- Buchan, Alex., F. R. S. of Edinburgh. Nr. 59.
- Buja, Antonio, Prof. di Scherma, Lecce. Nr. 64.
- Cora, Guido, Nr. 12, 30, 186, 297, 420, 457, 541.
- Cremona, Luigi, Selsk. udl. Medl., Direttore della R. Scuola
d'Applicazione per gl'Ingegneri, Roma. Nr. 129—132.
- Dahl, Hans, Sognepræst til Skorup og Tvilum. Nr. 17.
- Dall, W. H., Acting Assistant, U. S. Coast Survey, Washington.
Nr. 338.
- Dana, James D. & E. S., Professors, New Haven, Conn.
Nr. 333.
- Delgado, J. F. N., Presidente da Commissão Geologica de Por-
tugal, Lisboa. Nr. 218, 359.
- Delisle, Léopold, Selsk. udl. Medl., Chef for Nationalbibliotheket
i Paris. Nr. 222—224.
- Friedländer & Sohn, Carlsstrasse, Berlin. Nr. 257.
- Gauthier-Villars, Libraire, Quai des Augustins, 55, Paris.
Nr. 71, 418, 449.
- Grassmann, Robert, Redakteur, Stettin. Nr. 415.

- Haan, D. Bierens de, Selsk. udl. Medl., Prof. i Leiden. Nr. 76—77.
- Hébert, E., Professor i Paris. Nr. 452—454.
- Hermite, Charles, Selsk. udl. Medl., Prof. à l'École polytechnique, Paris. Nr. 78, 79.
- Hinrichs, Dr. Gustavus, Prof. i Iowa. Nr. 306, 340—343, 404, 537.
- Holst, Chr., Kammerherre, Sekretær ved Universitetet i Kristiania. Nr. 177, 178.
- Jørgensen, Dr. S. M., Lektor, Selsk. Medl., Kjøbenhavn. Nr. 93.
- Katter, Dr. F., Gymnasiallehrer in Putbus. Nr. 199, 244, 433, 536.
- Koehne, Le Baron B. de, Selsk. udl. Medlem., St.-Petersborg. Nr. 233, 234.
- Kölliker, Dr. A., Prof. an der Universität Würzburg. Nr. 72, 310, 408.
- Littré, Émile, de l'Académie française, Selsk. udenl. Medlem. Nr. 374.
- Mahtáb chand Báhádur, Maharája i Burdwan, Bengalen. Nr. 368—371.
- Neustrojew, A. N., Membre honoraire de l'Académie Imp. des Beaux-Arts de St.-Pétersbourg. Nr. 114.
- Orsoni, Francesco, Noto, Sicilia. Nr. 160.
- Plateau, Félix, Prof. à l'Université de Gand. Nr. 227, 437, 438.
- Prestwich, Joseph, F. R. S., Professor at Oxford. Nr. 399.
- Quaritch, Bernard, Bookseller, 15 Piccadilly, London. W. Nr. 313, 417, 488, 552.
- Quetelet, Ernest, Membre de l'Acad. R. de Bruxelles. Nr. 16, 37, 231, 397.
- Robinson, John, Esq. Nr. 330.
- Ross, Dr. A. M., F. L. S., Toronto, Canada. Nr. 225, 403.
- Schubert, Dr. H., Hamburg. Nr. 198, 409, 507.
- Sklarek, Dr. W., Berlin. Nr. 68.
- Stefani, Carlo de, Vicesegretario della Società Malacologica Italiana, Pisa. Nr. 20—27.

- Tarry, H., Membre de la Société météorologique de France, Paris. Nr. 423.
- Tassy, Garcin de, Selsk. udl. Medl., Medlem af det franske Institut, Paris. Nr. 13, 351.
- Thorkelsson, Jón, Rektor i Reykjavik. Nr. 544.
- Trafford, F. W. C., Esq., Lausanne. Nr. 226.
- Trémaux, P., Lauréat de l'Institut, Paris. Nr. 352.
- Trübner & Co., Ludgate Hill 57, London. Nr. 147, 254, 367, 419, 551.
- Wheeler, George M., Lieut., Corps of Engineers, U. S. Army, Washington. Nr. 318.
- Vimercati, Il Conte Guido, Ingegnere civile, Firenze. Nr. 9, 31, 145, 161, 184, 300, 389, 439, 485, 494.
- Wyatt, W. J., Captain, London. Nr. 400, 401.
- Zavizianos, George N., Prof. à l'Université d'Athènes. Nr. 63, 141.
- Zeuthen, Dr. H. G., Docent, Selsk. Medl., Kjøbenhavn. Nr. 60, 255.
-

R é s u m é

du

Bulletin de l'Académie Royale Danoise
des Sciences et des Lettres

pour l'année 1876.

Questions mises au concours pour l'année 1876.

Classe des Lettres.

Question de Philologie.

(Prix: la Médaille d'or de l'Académie.)

C'est un côté caractéristique de la vie intellectuelle d'une période plus avancée de l'antiquité — aussi bien en Grèce qu'à Rome — qu'une littérature d'une époque antérieure y est représentée et reconnue comme classique, qu'elle est regardée comme un modèle et une norme pour tous les temps, et qu'on y puise constamment comme dans un trésor. Mais les circonstances et son mode de transmission par des copies manuscrites, ont eu pour résultat que ce trésor a sans cesse été en s'amoindrissant, en tant qu'il n'a pas été conservé par la tradition de l'école. Désirant de provoquer une étude qui jette du jour sur cette tradition si importante pour notre possession de la littérature de l'antiquité, et qui en montre les conséquences en ce qui concerne la langue latine, l'Académie met au concours la question suivante pour l'année 1876:

Comment les écrivains romains classiques étaient-ils appréciés et utilisés par les grammairiens de l'Empire et dans leurs écoles? Quelle influence ont eue cette appréciation et cet usage sur la conservation et la disparition de la littérature, et que pouvait-il rester de l'ancienne littérature, qui fût encore en circulation et accessible environ 500 ans après J. C.?

Classe des Sciences.

Question d'Astronomie.

(Prix: la Médaille d'or de l'Académie.)

Il est, sous plusieurs rapports, important en Astronomie de connaître les nombres qui ont servi de base aux anciennes recherches. Comme ils n'ont pas été rassemblés suivant un plan, mais qu'il faut, dans chaque cas donné, les chercher avec beaucoup de peine dans les grands ouvrages ou les traités spéciaux qui s'y rapportent, l'Académie désire de provoquer un travail où soient réunies dans l'ordre chronologique de leur détermination, toutes les constantes dont on fait usage dans l'astronomie sphérique et théorique. Vu l'étendue de la matière, on se bornera à la période qui est comprise entre Ptolémée et la fin du XVIII^e siècle. Il ne sera pas nécessaire de soumettre à une critique la valeur intrinsèque des diverses constantes, mais il faudra les donner au complet et de manière qu'on puisse en embrasser l'ensemble. Seront en outre exclues les recherches spéciales concernant les mouvements propres et les parallaxes des étoiles fixes, les satellites des planètes extérieures et les éléments des orbites des comètes.

Question de Physique.

(Prix: la Médaille d'or de l'Académie.)

Notre connaissance de la réfraction de la lumière, considérée dans sa dépendance des divers états des corps, laisse encore beaucoup à désirer, ce dont il faut en grande partie chercher la cause dans l'insuffisance de nos matériaux en ce qui concerne les vapeurs.

L'Académie désire en conséquence de provoquer des recherches sur la puissance réfractive et dispersive de quelques corps volatils à l'état de vapeur.

Prix Thott.

(400 Couronnes)

Tandis que beaucoup de réactions chimiques s'effectuent si rapidement, qu'elles peuvent presque être regardées comme instantanées, il y en a d'autres qui exigent un temps très appréciable, bien que l'état dans lequel les corps en présence se trouvent, semble devoir être particulièrement favorable à la rapidité de la réaction. A cette dernière classe de réactions appartient, par ex., celle du chlore ou du brome sur les acides hypo-phosphoreux et phosphoreux dans des solutions aqueuses, dont les progrès lents peuvent être suivis facilement avec le thermomètre.

L'Académie désire de provoquer une série de recherches, qui puissent éclaircir la cause de cette différence, ou faire connaître la loi qui règle la marche de la réaction dans quelques cas bien choisis.

Prix Classen.

I. (Jusqu'à 400 Couronnes.)

Des recherches récentes semblant mettre en doute que les sels de soude, qui sont si répandus dans le sol et dans les cendres végétales, soient réellement aussi nécessaires au développement normal des plantes que les sels de potasse, de chaux, de magnésie et de fer, l'Académie propose un prix, qui pourra s'élever jusqu'à 400 Couronnes, pour un travail qui résoudra cette question, en ce qui concerne quelques plantes sauvages et cultivées du Danemark.

II. (Jusqu'à 800 Couronnes.)

Comme il a été constaté que l'orge danoise, et surtout celle dont la cassure est compacte et vitreuse au lieu d'être farineuse, ne possède souvent pas les qualités requises pour un bon malt, et qu'il importe de remédier à ce défaut, tant à cause de son

emploi dans nos fabriques de malt, que de son exportation en Angleterre, l'Académie propose un prix, qui pourra s'élever jusqu'à 800 couronnes, pour un travail qui expliquera la nature de cette orge, et indiquera les circonstances qui, dans sa croissance, sa culture et son traitement, sont la cause du défaut dont il s'agit.

Prix Schou.

(Jusqu'à 1000 Couronnes.)

On sait que les forêts ont entièrement disparu dans plusieurs régions du Danemark, et que là même où il en existe encore, elles occupent en général une étendue moindre qu'autrefois. Il n'est pas douteux que les changements qu'a subis le niveau de l'eau dans un grand nombre de nos lacs et de nos cours d'eau, ne soient en connexion avec ce fait; mais ces deux questions, qui pourront certainement être éclaircies à l'aide des cartes, des registres du cadastre et des archives, n'ont pas encore été l'objet de recherches approfondies et dignes de confiance.

L'Académie propose en conséquence un prix, qui pourra s'élever jusqu'à 1000 couronnes, pour un travail basé sur des faits authentiques et accompagné de cartes, qui fera connaître, pour différentes époques des derniers siècles, l'étendue des forêts du Danemark — autant que possible leur nature — et le régime de ses cours d'eau. Comme il n'est pas probable qu'une seule personne puisse résoudre cette question d'une manière satisfaisante pour le pays tout entier, le prix proposé pourra aussi être accordé à un mémoire qui n'embrassera qu'une partie du Danemark, par ex. une des grandes îles ou une région du Jutland.

Les réponses à ces questions peuvent être écrites en latin, en français, en anglais, en allemand, en suédois et en danois. Les mémoires ne doivent pas porter le nom de l'auteur, mais une

devise, et être accompagnés d'un billet cacheté muni de la même devise, et renfermant le nom, la profession et l'adresse de l'auteur. Les membres de l'Académie qui demeurent en Danemark ne prennent point part au concours. Le prix accordé à une réponse satisfaisante à l'une des questions proposées, lorsqu'aucun autre n'est indiqué, est la Médaille d'or de l'Académie, d'une valeur de 320 couronnes.

Les mémoires, à l'exception de ceux qui se rapportent aux deux dernières questions, et pour lesquels le délai fixé expirera respectivement le 31 Octobre 1878 et le 31 Mars 1879, devront être adressés avant la fin du mois d'Octobre 1877, au secrétaire de l'Académie, M. le Conseiller J. Japetus Sm. Steenstrup, professeur à l'Université de Copenhague.

Funiculus scleroticae,
un reste de la fente fœtale dans l'œil humain,

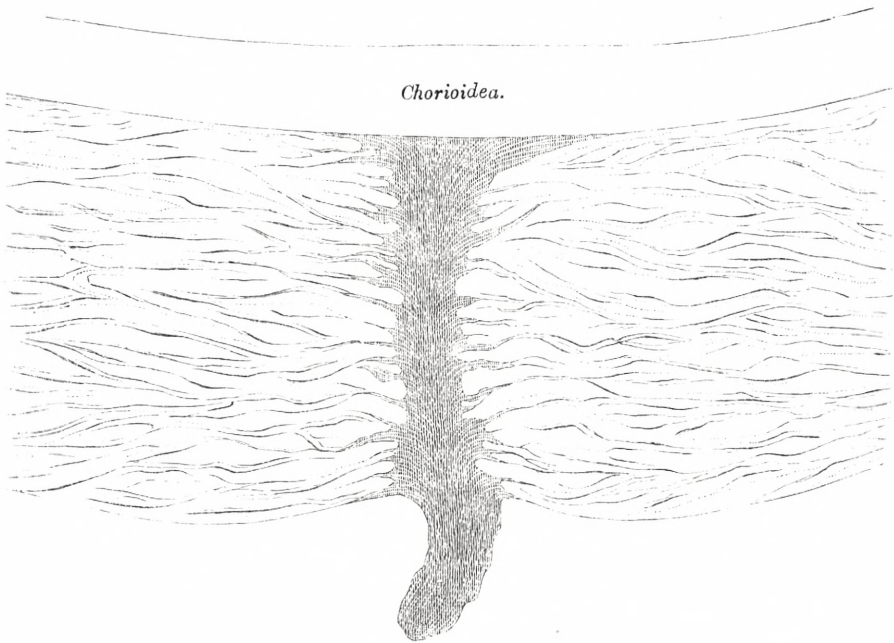
par

M. Adolphe Hannover.

Communiqué dans la séance de l'Académie des Sciences du 8 Décembre 1876.

Dans un mémoire sur le Coloboma oculi, j'ai représenté le Coloboma comme une formation résultant d'un arrêt de développement, et due à une fermeture incomplète de la fente qui existe chez le fœtus dans toutes les membranes de l'œil, ainsi que dans le corps vitré, l'iris et le corps ciliaire; j'ai donc appelé le Coloboma un grand œil fœtal où le type fœtal se retrouve dans tous ses détails. Dans l'œil normal, chez les adultes, on ne connaissait jusqu'ici qu'un reste constant de la fente dont il s'agit, à savoir la Macula lutea avec la Fovea cœca, et, dans mon mémoire, récemment publié, sur la rétine de l'homme et des vertébrés, je suis en outre arrivé à ce résultat que la Fovea cœca est non-seulement une formation due à un arrêt de développement, mais aussi la partie la plus défectueuse de toute la rétine.

Depuis lors, j'ai réussi à découvrir dans l'œil humain un autre reste de la fente fœtale, auquel j'ai donné le nom de Funiculus scleroticae. En faisant une coupe verticale dans la sclérotique, exactement derrière la Fovea cœca, on trouve dans son intérieur un cordon solide qui croise à angle droit ou un peu obliquement les fibres de la sclérotique. Si l'on se figure l'homme debout, ce cordon se dirige le plus souvent en avant, en haut et en dehors à travers la sclérotique. A l'œil nu, il est assez nettement limité, et, avec un faible grossissement, on observe que les fibres de la sclérotique viennent se fixer en faisceaux arrondis à sa surface externe; mais leur marche s'interrompt brusquement, de sorte



Funiculus scleroticæ ($\frac{1}{51}$)

qu'on ne peut poursuivre le même faisceau des deux côtés du cordon. L'épaisseur en varie un peu; c'est en général celle d'un fil à coudre fin. L'extrémité antérieure du cordon, vers l'intérieur de l'œil, est ordinairement un peu plus épaisse, et adhère assez fortement à la surface externe de la choroïde par un évasement en forme de trompette; quelquefois elle est élevée en forme de demi-sphère, ou bien on trouve quelques filaments libres qui sont détachés de la choroïde. L'extrémité postérieure du cordon est également plus large, surtout en bas, et, après un parcours plus ou moins long, se perd dans le tissu cellulaire qui recouvre la surface externe de la sclérotique; on peut rencontrer cette extrémité pendant librement en dehors de la sclérotique. La largeur des extrémités antérieure et postérieure peut s'accroître tellement, que tout le cordon présente la forme d'un sablier, et est fortement étranglé en son milieu. La sclérotique est ordinairement concave, tant à sa surface antérieure que postérieure, au point où elle est traversée par le cordon, de sorte qu'elle est

plus mince en cet endroit. Quelquefois, l'extrémité antérieure du cordon est indiquée par un petit enfoncement plat ou une petite plaque sur la surface interne de la sclérotique, ou par une couleur différente, plus forte ou plus faible, du pigment. Il est rare qu'à l'endroit dont il s'agit on puisse distinguer un enfoncement sur la surface externe de la sclérotique; l'enfoncement est parfois peluché ou inégal, tandis que la surface environnante est unie.

Avec un grossissement plus fort, on voit que le cordon est finement strié dans le sens de sa longueur, et composé de fibres qui se croisent avec celles de la sclérotique. Les fibres sont très fines et molles, décrivent de légères sinuosités ou sont réunies en faisceaux, et sont recouvertes d'un assez grand nombre de petits noyaux anguleux; elles sont bien faciles à distinguer des fibres plus épaisses et plus raides de la sclérotique. Elles reposent dans une masse homogène et compacte, blanc-grisâtre, sans mailles comme dans la sclérotique, et sont très difficiles à séparer les unes des autres.

Le *Funiculus scleroticæ* est constant; j'ai examiné 50—60 yeux humains d'adultes et d'enfants, et il n'a jamais fait défaut. Il faut choisir de préférence des yeux à sclérotique épaisse, et il est bon de les durcir dans l'acide chromique étendu d'eau, parce qu'il est alors plus facile d'y pratiquer des coupes minces. Par suite de la marche souvent oblique ou ondulée du cordon, il arrive fréquemment qu'on ne réussit pas à le découvrir tout entier à l'aide d'une seule coupe, mais qu'il en reste une partie couverte par les fibres de la sclérotique, entre lesquelles il semble se perdre.

Le *Funiculus scleroticæ* ne peut être confondu avec aucune autre formation dans la sclérotique, notamment pas avec les vaisseaux et les nerfs qui la traversent. Les ouvertures qui leur livrent passage apparaissent en coupe transversale comme des trous ronds ou ovales, et elles sont recouvertes sur leur face interne de fibres sinueuses de tissu cellulaire; elles n'interrompent pas la marche des fibres de la sclérotique, mais sont seulement percées au milieu d'elles, et ne laissent passer que des vaisseaux et des nerfs. On n'y trouve jamais de cordon solide semblable au *Funiculus*.

Bien que le *Funiculus scleroticæ* ne manque jamais, il présente cependant, même dans les yeux du même sujet, des variations de forme, de grosseur et de marche. Nous avons déjà

mentionné plus haut la forme en sablier. Il se dirige tantôt horizontalement en avant, tantôt plus obliquement, ou décrit un S ou un arc convexe. Il peut se bifurquer près de la surface interne de la sclérotique. Dans quelques cas très rares, on trouve 2 ou 3 cordons plus minces, ou comme des cordons rudimentaires à côté ou au-dessus et au-dessous du cordon normal. Au lieu d'un cordon solide, j'ai rencontré une fois un groupe de fibres en forme de tourbillon, qui semblaient provenir de 2 ou 3 cordons irréguliers. Enfin, on peut même chez les adultes trouver l'indication d'une formation de vaisseaux dans l'intérieur du Funiculus.

Le Funiculus a en effet été perméable à l'origine et a contenu un ou deux vaisseaux. La preuve, c'est que d'abord, dans quelques yeux d'adultes, j'ai, sur des sections très minces du Funiculus, pu voir à la lumière transmise les restes d'un vaisseau, qui était reconnaissable au double contour de ses parois et à une striure transversale serrée très fine, mais le vaisseau lui-même était fermé. Ensuite, on peut, également chez les adultes, outre le Funiculus, constater l'existence de 2 ou 3 vrais vaisseaux à la surface externe de la sclérotique, où peut aussi en même temps se trouver une fente, qui cependant n'y pénètre pas plus profondément. De plus, dans des yeux d'enfants nouveau-nés, j'ai souvent pu voir une ouverture aux extrémités du Funiculus, qui était d'ailleurs fermé, et on peut également, comme chez les adultes, y rencontrer des vaisseaux ouverts à côté du Funiculus fermé. Enfin, dans quelques yeux de nouveau-nés, j'ai trouvé tout le canal ouvert et revêtu de fibres de tissu cellulaire, comme c'est le cas pour d'autres ouvertures qui livrent passage à des vaisseaux et à des nerfs dans la sclérotique. D'ailleurs, le Funiculus, chez les nouveau-nés, se comporte en général comme chez les adultes; seulement, il est parfois plus difficile à observer, lorsque la sclérotique est plus mince dans son ensemble. Toutes ces différences chez les nouveau-nés et, en partie aussi, chez les adultes, doivent être rapportées à un point d'arrêt différent dans le développement du Funiculus, dont la cavité primitive se ferme plus tôt ou plus tard, mais en général est déjà fermée à la naissance.

On peut aussi trouver des traces de la fente de l'œil dans les autres parties de la sclérotique qui avoisinent le Funiculus. Nous avons déjà dit plus haut que la surface interne de la

scélrotique, chez les adultes, peut, juste derrière la Fovea, présenter une légère concavité, et que l'extrémité postérieure du Funiculus, dans quelques cas rares, est aussi indiquée par une dépression sur la surface externe de la scélrotique. Ces caractères sont encore plus fortement prononcés dans les yeux des nouveau-nés. Non-seulement on y rencontre des dépressions semblables, mais toute l'étendue depuis l'entrée du nerf optique et, horizontalement en dehors, au-delà de l'entrée du Funiculus, peut être marquée par un sillon, tant sur la surface interne de la scélrotique que sur sa surface externe, et la scélrotique peut être sensiblement plus mince dans toute l'étendue d'abord occupée par la fente de l'œil, ce qui n'est pas le cas dans les yeux des adultes. Dans le Coloboma oculi, j'ai montré que la Protuberantia scleroticalis très saillante qui, sur la surface interne de la scélrotique, apparaît comme une profonde fosse ovale, et la minceur de cette membrane en ce point, sont une suite d'un arrêt dans la fermeture de la fente de l'œil (Über den fœtalen Zustand des Auges bei der Form des Coloboma; das Auge 1852, p. 99, Pl. III, Fig. 23).

La choroïde, qui est fixée à l'extrémité intérieure du Funiculus, ne présente dans sa substance même guère de trace de formation de cicatrice ou de raphé; en général, elle est un peu plus épaisse dans la direction de la Macula, tant chez les adultes que chez les nouveau-nés. Par contre, on peut souvent constater des traces d'un raphé dans la distribution des vaisseaux.

Comme l'extrémité antérieure du Funiculus est étroitement unie à la choroïde, il est vraisemblable qu'avant la naissance un ou deux vaisseaux ont, en ce point, passé de la scélrotique dans la choroïde, point où celle-ci, selon toute probabilité, a aussi été fendue, et vu l'étroite adhérence de la choroïde à la Fovea cœca, il est même probable que le vaisseau a pénétré complètement dans la continuation de la fente dans la Fovea cœca, et peut-être plus loin dans le corps vitré.

Chez les singes, j'ai seulement eu l'occasion d'examiner les yeux de trois individus, savoir un Cercopithecus fuliginosus, un Macacus cynomolgus et un Macacus nemestrinus. J'ai trouvé chez tous des traces distinctes de la fente de la scélrotique, car, dans une étendue de 4—5 Mm., horizontalement en dehors du nerf optique, sur la surface interne ou externe de la scélrotique, ou sur les deux, il y avait un sillon où la scélrotique était plus mince et transparente lorsqu'on la tenait devant la lumière.

A l'extrémité extérieure du sillon ou un peu à côté, se trouvait l'ouverture d'un assez gros vaisseau, qui traversait très obliquement la sclérotique, de sorte que son ouverture, à la surface externe de la sclérotique, était 1—1,5 Mm. plus près de nerf optique que l'ouverture à la surface interne; il pouvait y avoir dans le sillon ou à côté plusieurs vaisseaux plus petits. Les vaisseaux étaient ouverts et remplis de sang coagulé, et par suite le grand vaisseau n'était pas encore transformé en cordon solide.

Nouvelle méthode de différentiation à indice quelconque

par

M. F. Buchwaldt,
Capitaine d'état-major.

En renvoyant aux formules, aux démonstrations et aux exemples du mémoire danois, je me bornerai, dans ce résumé, à donner un court exposé de ma nouvelle méthode de différentiation à indice quelconque, et notamment de ses résultats et de ses applications.

I. Principes généraux de la méthode.

Préface. Les difficultés que présente la méthode de différentiation à indice quelconque de M. Liouville, méthode qui est basée sur la formule

$$\frac{\delta^m e^{ax}}{\delta x^m} = a^m e^{ax},$$

où l'indice de différentiation m peut être un nombre quelconque, résident principalement dans le développement en série convergente, suivant les puissances de e^x , d'une fonction $f(x)$, lequel est en général très laborieux et quelquefois même impossible, dans la possibilité que $\frac{\delta^m f(x)}{\delta x^m}$ ait une infinité de valeurs, et dans la détermination de la « fonction complémentaire », qui est de la forme $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$, mais dans laquelle les coefficients $C_0, C_1, C_2 \dots$ ont généralement des valeurs infinies. M. le professeur Kelland a bien donné plus tard, à l'aide d'une pareille fonction complémentaire, une formule pour $\frac{\delta^m x^n}{\delta x^m}$, et pris cette formule pour point de départ d'une extension de la méthode de M. Liouville; mais veut-on demander à la méthode — ce qui

incontestablement est le plus pratique et le plus simple — que ses formules pour $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$ ne doivent pas renfermer des termes de la fonction complémentaire, la formule fondamentale de M. Liouville ne peut alors s'accorder avec celle de M. Kelland pour $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$, car celle-ci, pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, donne $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = 0$ et, par conséquent aussi, $\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m} = 0$.

La méthode que nous allons exposer conduit à des formules simples pour $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$, et résout d'une manière facile et complète tous les problèmes qui, en général, peuvent être résolus par différenciation à indice quelconque.

§ 1. Une petite lettre latine avec un accent au-dessus ($a', b', c' \dots$), désigne partout dans ce mémoire un nombre entier positif (ou 0), et une petite lettre grecque ($\alpha, \beta, \gamma \dots$), une quantité positive (ou 0), plus petite que l'unité.

La fonction « a », définie par

$$«a» = a(a-1)(a-2) \dots (-\infty) \quad (1)$$

est infinie ou indéterminée, mais donne pour $\frac{«a»}{«a \pm k'»}$ les expressions finies représentées dans (2). La grandeur $\frac{«a'»}{«0»} = a'(a'-1) \dots 2.1$ est aussi désignée par $[a']$.

La fonction $\gamma(a)$ est définie en partie par la relation $\gamma(a) = (a-1)\gamma(a-1)$, ou, suivant (2), par la formule (3), en partie, pour les valeurs réelles de a , par la formule (4). Comme $\gamma(1) = \Gamma(1) = 1$, on aura $\gamma(0), \gamma(-1), \gamma(-2), \dots, \gamma(-a'), \dots = \pm \infty$, tandis que $\frac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')}$ a la valeur finie indiquée dans la formule (a). Pour des valeurs réelles de a , la figure montre $\gamma(a)$ comme l'ordonnée dans un système de coordonnées rectangulaires a et $\gamma(a)$.

Lorsque a est imaginaire $= b + c\sqrt{-1}$, $\gamma(a)$, si $b < 0$, peut d'abord à l'aide de la formule (3), être exprimée par $\gamma(b' + \beta + c\sqrt{-1})$, qu'on détermine ensuite au moyen de la formule (4)' qui est une forme plus générale de (4).

§ 2. Les formules (2) et (3), si on leur applique la différentiation ordinaire à indice entier positif ou négatif, donnent l'équation (b), qui est une forme spéciale de

$$\frac{d^m Cx^n}{dx^m} = C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} x^{n-m} \quad (5)$$

formule que nous prendrons pour base de la différentiation à indice quelconque (réel ou imaginaire).

Comme elle donne $\frac{d^p}{dx^p} \cdot \frac{d^{m-p} Cx^n}{dx^{m-p}} = \frac{d^m Cx^n}{dx^m}$, l'ordre de différentiation est indifférent; mais, puisque $\gamma(-a') = \pm \infty$ et $\frac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')}$ est fini, elle ne sera pas directement applicable dans le cas où $n = -(1+n')$, en même temps que $m \geq s' - n'$.

§ 3. Toute différentiation à indice m , exécutée d'après la formule (5) ou une de celles déduites de (5) dont il sera question plus loin, doit toujours être complétée avec une fonction arbitraire $\psi(m, x)$, qui disparaît par une différentiation à indice $-m$. Nous appellerons cette fonction arbitraire le «complément» de $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$.

Donc, si l'on désigne par $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$ «la fonction complète dérivée de $f(x)$ par différentiation à indice m par rapport à x », et par $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ la «fonction incomplète dérivée de $f(x) \dots$ », on aura

$$\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} = \frac{d^m f(x)}{dx^m} + \psi(m, x) \quad (A)$$

$\frac{d^m f(x)}{dx}$ étant donné par (5) ou par d'autres formules déduites de (5), tandis que le complément $\psi(m, x)$ est arbitraire et de la forme

$$\psi(m, x) = x^{-m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \quad (B)$$

Dans beaucoup d'applications (voir art. 1, 2, 3, 4), on aura $\psi(m' + \mu, x) = 0$ et $\psi(-m' - \mu, x) = x^{m'+\mu-1} (C_0 + C_1 x^{-1} \dots + C_{m'-1} x^{-(m'-1)})$; mais, en général, le complément $\psi(m, x)$ pourra être complètement déterminé par des conditions

données, qui devront être satisfaites par $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$ pour certaines valeurs de m et de x .

§ 4. Il nous sera maintenant facile d'établir une formule répondant à (5) pour le cas où (5) n'est pas directement applicable, à savoir lorsque $n = -(1 + n')$ et $m > s' - n'$; car si l'on différentie $x^{-(1+n')} = \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2} (x^{-(1+n')+\varepsilon} + x^{-(1+n')-\varepsilon})$ d'après (5), et qu'on élimine les termes qui, suivant (B), seront de la forme $\phi(m, x)$, on aura la formule (5)'. Les formules très simples (5) et (5)' nous permettent de différentier une fonction quelconque $f(x)$.

§ 5. D'après les formules (6) et (7), dans lesquelles a ne peut être infini, $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ peut aussi être calculé par une intégrale définie; mais, tandis que les formules (5) et (5)' ne peuvent donner des termes de la forme $\phi(m, x)$, ce sera généralement le cas pour les formules (6) et (7). Il y a cependant beaucoup de cas où (6) et (7) donneront exactement le même résultat que (5) ou (5)'. Si, par ex., un développement de $f(x)$ en série suivant des puissances de x donne $\lim_{\varepsilon} \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$, calculé à l'aide de (6)' ou de (7)', ne renfermera pas de termes de la forme $\phi(m, x)$.

§ 6. La formule (8) donne le développement en série de $\frac{d^m f_1(x) f_2(x)}{dx^m}$. La série sera convergente lorsque $m = m'$, ou lorsque $f_1(x)$ pourra être développée en série d'après la formule de Maclaurin, ou que $\lim_{\varepsilon} \varepsilon f_1(\varepsilon) f_2(\varepsilon) = 0$.

La relation (n) déduite de (8) et de (5) est de rigueur, soit qu'on ait $m = m'$, ou $p = p'$, ou $n + p > -1$.

§ 7. A l'aide de la formule (9), qui ne renferme pas de termes de la forme $\phi(m, x)$, on obtient $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ exprimé en $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, La série est convergente lorsque $\lim_{\varepsilon} \varepsilon f(\varepsilon) = 0$.

La relation (p) est déduite des formules (9) et (5).

§ 8. La comparaison des différentes expressions de $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ peut donner des résultats intéressants, par ex. en ce qui concerne la sommation des séries, en supposant que les formules employées n'introduisent pas des termes de la forme $\psi(m, x)$. C'est ainsi que d'expressions différentes de telles formules on a tiré les relations (n) et (p), et la relation (r) se tire de la même manière des deux expressions (q) et (q') de $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$, qu'on obtient à l'aide des formules (9) et (5).

En différentiant $x^m lx = \lim_{\varepsilon} \frac{x^{n+\varepsilon} - x^{n-\varepsilon}}{2\varepsilon}$ d'après la formule (5), on obtient la formule très importante (10), qui, en quelque sorte, supplée les formules (5) et (5)', et donne une expression très simple pour $\frac{d^m x^n lx}{dx^m}$. Si, dans la formule (8), on pose $f_1(x) = lx$ et $f_2(x) = x^n$, on aura la formule (10)', qui donne $\frac{d^m x^n lx}{dx^m}$ exprimé en une série qui sera convergente lorsque $m = m'$ ou $n > -1$. De ces deux expressions de $\frac{d^m x^n lx}{dx^m}$, on tire alors facilement les formules (3)', (11) et (12) qui sont importantes pour la fonction $\gamma'(a) = \frac{d\gamma(a)}{da}$, de même que les formules (t) pour $\frac{d^{\pm m'} x^n lx}{dx^{\pm m'}}$, et, relativement à la sommation des séries, les relations (u), (v) et (v)'.

§ 9. Il comprend des recherches plus détaillées sur la nature et la détermination du complément. Lorsqu'une fonction $f(x)$ est différenciée successivement aux indices $m_1, m_2, \dots, m_{i'}$, il faut à chacune de ces différenciations successives ajouter les compléments $\psi_1(m_1, x), \psi_2(m_2, x) \dots \psi_{i'}(m_{i'}, x)$. Quoique le premier de ces compléments puisse avoir une autre signification, et être arbitraire dans un autre sens que les suivants, tous ces compléments pourront cependant être déterminés par des conditions de la même nature, comme, par ex., en posant que $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\}$, pour certaines valeurs de m et de x , doit satisfaire à des conditions données (prendre des valeurs données). Dans la plupart des problèmes qui se présentent, on aura à déterminer

$f(x)$ d'après $\left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} = F(x)$ ou, plus généralement, d'après $F\left(\frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}}, \frac{d^{m_2} f(x)}{dx^{m_2}}, \dots, x\right) = 0$, qui est une équation différentielle d'un ordre quelconque.

§ 10. En général, on a

$$\frac{d^m f(x+a)}{dx^m} = \frac{d^m f(x+a)}{d(x+a)^m} \tag{13}$$

mais, lorsque le développement en série de $f(x+a)$ suivant des puissances de $(x+a)$, renferme des exposants qui sont des nombres entiers positifs ou négatifs (ou 0), $\frac{d^m f(x+a)}{dx^m}$ diffèrera de $\frac{d^m f(x+a)}{d(x+a)^m}$ par des termes de la forme $\psi(m, x)$, ou de la forme $\psi(m, x+a)$.

§ 11. Pour justifier par un exemple la possibilité de l'intégration, mentionnée dans le § 9, d'équations différentielles d'un ordre quelconque, j'ai intégré l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} + ax^n y = 0$$

à l'aide de la formule (5), en posant $y = x^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} x^{i'p}$. Lorsque $n = -m$, on aura $y = \sum C_q x^q$, q étant donné par $\frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1-m)} + a = 0$. Si $n \gtrless -m$, l'intégrale complète y sera la somme d'un nombre infini d'intégrales particulières, dont chacune renferme une constante arbitraire, et est représentée par une série suivant des puissances de x . Pour passer de là à $m = m'$, c'est chose facile.

II. Applications de la méthode.

Introduction. Les principes que nous venons de poser pour la différentiation à indice quelconque seront, dans ce qui suit, exposés en partie sous une forme plus complète, et éclaircis par une série d'applications. Nous avons choisi de préférence tous les exemples traités par M. Liouville, pour montrer que notre

méthode pourra être employée avec avantage pour la solution de tous les problèmes qui peuvent se résoudre par la méthode de cet illustre géomètre. Les exemples sont en partie présentés sous une forme plus générale, et résolus d'une manière plus simple et plus complète. On a partout eu égard aux conditions qui rendent possible une solution du problème, et à la détermination du complément.

Les notations introduites au § 1 sont conservées.

Art. 1. Comme la différentiation à indice $-(m' + \mu)$, indiquée dans la formule (6) du § 5, peut renfermer des termes du complément $\psi(-(m' + \mu), x)$, tandis qu'une différentiation d'après les formules (5), (5)', (9), (10) et, conditionnellement, (8) ne peut amener de pareils termes, nous la désignerons partout dans ce qui suit par $\int_a^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu}$ au lieu de $\int_a^{(m'+\mu)} f(x) dx^{m'+\mu} = \frac{d^{-m'-\mu} f(x)}{dx^{-m'-\mu}}$, comme constituant une différentiation d'une espèce à part. L'équation (6) sera remplacée par l'équation ((6)), qui contient la définition de cette espèce de différentiation.

En soumettant à une recherche plus approfondie les formes des fonctions f et F dans l'équation

$$\int_a^{(m)} f(x) dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1} f(t) dt = \frac{1}{\gamma(m)} F(x), \quad (m > 0),$$

on trouve comme condition absolue

$$\lim_{\varepsilon} \frac{F(a + \varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0 \quad (\gamma)$$

et que, lorsque $F(x)$ renferme des termes de la forme $\psi(-m, x-a)$ qui s'évanouissent pour $x=a$, $f(x)$ contiendra des termes correspondants de la forme $\psi(m, x-a)$, s'évanouissant également pour $x=a$. Les équations (β) et (β)' en sont des exemples. Mais si $F(x)$ ne renferme pas de termes de la forme $\psi(-m, x-a)$ qui s'évanouissent pour $x=a$, $f(x)$ ne contiendra aucun terme de la forme $\psi(m, x-a)$.

Comme ((6)) remplace (6), de même ((7)) remplace (7) dans les formules suivantes. Lorsque $f^{(\nu)}(a) = 0$, on peut aussi se servir de ((7))'.

Art. 2. Détermination de la fonction f de l'équation

$$\int_a^{\xi} (\xi - x)^{m-1} f(x) dx = F(\xi)$$

dans laquelle $m > 0$, a n'est pas infini et F est une fonction connue.

La condition (γ) doit être satisfaite. On peut donner à l'équation la forme I, où $\Psi(\xi - a)$ renferme tous les termes de $F(\xi)$ qui, ayant la forme $\psi(-m, \xi - a) = (\xi - a)^{m-1} \Sigma K_{r'} (\xi - a)^{-r'}$, s'évanouissent pour $\xi = a$. La fonction $f(x)$ est alors donnée par II, où la différentiation $\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m G(x)}{dx^m}$ doit être faite de manière à éviter des termes de la forme $\psi(m, x)$, par conséquent d'après les formules (5), (5)', (9) et (10), ou, conditionnellement, d'après (7)' et (8). Le complément $\psi(m, x - a)$ est alors déterminé par la dernière équation II. En général, $\Psi(x - a) = 0$, et, dans ce cas, on a aussi $\psi(m, x - a) = 0$. Dans le cas contraire, $\Psi(x - a)$ pourra être rapporté à l'une ou l'autre des formes contenues, avec les valeurs correspondantes du complément $\psi(m, x)$, dans les formules IIa et IIb. Si $F(x)$ est donné directement comme une fonction de $(x - a)$, il faudra différentier par rapport à $(x - a)$, comme on a généralement (voir § 10) $\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m F(x)}{d(x - a)^m}$.

Lorsque I a la forme très ordinaire I', on doit, d'après la condition (γ), avoir $n_{r'} > m - 1$, $q_{r'} > m - 1$ et $p_{r'} > 0$. La fonction $f(x)$ sera alors complètement déterminée par II'. Ex. 1, 2, 3.

Art. 3 & 4. Lorsque le signe \int désigne une intégrale définie renfermant une fonction inconnue φ qui doit être déterminée par l'équation

$$\int = H(\xi)$$

dans laquelle H est une fonction connue, il faut, en substituant à ξ une nouvelle variable ζ dépendante de ξ , chercher à mettre \int sous la forme $\int_a^{\zeta} (\zeta - z)^{m-1} f(z) dz = \gamma(m) \int_a^{(m)} f(\zeta) d\zeta^m$, où m est > 0 , a non infini et f une fonction renfermant la fonction inconnue φ .

Les formules (A) — (G) de l'art. 4 renferment des exemples de différentes formes de \int qui se laissent ainsi transformer en $\int_a^{(m)} f(\zeta) d\zeta^m$. Pour chacune de ces formules, on a indiqué la substitution qui a été employée, laquelle, également appliquée à la fonction connue $H(\xi)$, la change en une fonction connue $F(\zeta)$.

Le problème est alors ramené à la forme $\gamma^{(m)} \int_a^{(m)} f(\zeta) d\zeta^m = F(\zeta)$, qui donne $f(\zeta) = \frac{1}{\gamma^{(m)}} \left\{ \frac{d^m F(\zeta)}{d\zeta^m} \right\}$, la différentiation et la détermination du complément $\psi(m, \zeta - a)$ s'exécutant, la condition (γ) une fois remplie, d'après les règles données dans l'Art. 2. (Voir l'exemple dans l'Art. 3 et les exemples 1, 2, 4 et 5 dans l'Art. 4).

Si, au lieu de $\int = H(\zeta)$, on a l'équation $H(\int_1, \int_2, \dots, \xi) = 0$, dans laquelle les intégrales définies \int_1, \int_2, \dots renferment toutes la même fonction inconnue φ , la manière de procéder sera dans les traits principaux la même (voir Ex. 3 dans l'Art. 4).

Art. 5. Equations différentielles linéaires d'un ordre quelconque.

L'équation différentielle importante pour les applications

$$\frac{d^m y}{dx^m} + ax^n y = 0 \quad \text{III}$$

qui, par la méthode exposée au § 11, est complètement intégrée dans III', est d'abord dans cet article soumise à un examen plus détaillé. Les différents cas remarquables sont représentés, pour $n = -2m$, dans les équations (ζ) et (ε) avec l'intégrale particulière (ε)', et, pour $m = m'$ et $n = -2m'$, dans l'équation (γ), avec son intégrale complète (γ)', également connue par une autre voie. Lorsque $(m + n) = p'$, III' ne donnera une intégrale complète que pour $m = m'$ et $p' \geq m'$; mais, par une extension de la méthode d'intégration employée au § 11, en prenant, outre la formule (5), également la formule (10), on obtient facilement un nombre d'intégrales particulières double de celui que donne III' pour $(m + n) = p'$. Les résultats en sont exposés dans les équations IIIa et III'a, ou, pour $m = m'$ et $p' \leq m' - 1$, dans les équations IIIa et III''a. Lorsque $m = 2p'$ et $n = -p'$, on obtient l'équation IIIb avec son intégrale complète III'b.

Une équation différentielle linéaire de la forme IV pourra en général s'intégrer de la même manière que III, par conséquent en employant la formule (5) dans la substitution

$$y = (x+c)^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}(x+c)^{i'p}$$

notamment si les termes de l'équation peuvent se diviser en 2 groupes, de façon que $(n_{i'} - m_{i'})$ soit constant dans chaque groupe isolément (voir Ex. 2).

Lorsque IV prend la forme plus spéciale V, on a l'intégrale complète très simple V', qui est une généralisation du résultat connu pour $m_{i'} = m'_{i'}$. L'intégrale V' est en même temps une forme plus générale de l'intégrale III'', qui est employée dans l'exemple 1.

L'exemple 2 montre la marche systématique, mentionnée plus haut, que j'ai suivie dans l'intégration des équations de la forme IV. Cet exemple a été traité d'une autre manière par M. Liouville; mais le résultat auquel il est arrivé ne s'accorde pas avec celui que j'ai trouvé, et je fais voir qu'il est inexact.

Art. 6. M. Liouville a traité l'équation différentielle du 2^e ordre VI par sa méthode de différentiation à indice quelconque; mais sa fonction complémentaire, dans des applications analogues, conduit facilement à des erreurs, qui sont indiquées dans une remarque à la fin de cet article.

Par la différentiation de VI, suivant la formule (8) du § 6, on trouve l'intégrale IX, où m a une des valeurs mentionnées dans VII, tandis que z est déterminé par VIII. On détermine les constantes arbitraires $C_{i'}$ en les introduisant dans VI. Lorsque les valeurs de z répondant à m_1 et à m_2 sont désignées par z_1 et z_2 , l'intégrale peut aussi être représentée par IX', si, comme dans l'exemple 1, $\frac{d^{-m_2-1}z_2}{dz^{-m_2-1}}$ est de la forme $\phi_1(-m_1-1, x)$, ou $\frac{d^{-m_1-1}z_1}{dz^{-m_1-1}}$, de la forme $\phi_2(-m_2-1, x)$. Cependant, on n'obtient souvent qu'une intégrale particulière. Des équations qui peuvent prendre la forme VI, nous signalerons VIa, VIb et VIc.

Lorsque les constantes a et b sont nulles en même temps, VI peut prendre la forme X, qui est intégrée dans XIII, z y étant déterminé par XI et XII. On détermine ensuite les constantes $C_{i'}$ de même que K_1 et K_2 en les introduisant dans X.

En général, XIII ne donne qu'une intégrale particulière, mais dont, par la méthode connue, on peut former l'intégrale complète. Ainsi si, dans l'équation X, le côté droit $F(x) = 0$, on trouve l'intégrale particulière XIII', qui, à l'aide d'une des formules (A) — (G) de l'art. 4, peut être ramenée à la forme d'une intégrale définie. C'est ce qui est éclairci dans l'exemple 2, où l'équation différentielle (λ) a, suivant XIII', l'intégrale particulière (λ)', qui, par la formule (G), peut être transformée en intégrale définie (λ)''. D'ailleurs (λ) est une forme spéciale, non-seulement de X, mais aussi de l'équation IIIb, Art. 5, de sorte que son intégrale complète s'obtient de III'b, en y faisant $p' = s$ et $a = -1$.

Art. 7. Il renferme des considérations générales sur la nature des problèmes qui exigent l'emploi d'une différentiation à indice quelconque.

Les règles à suivre dans la différentiation à indice quelconque par rapport à plusieurs variables x_1, x_2, x_3, \dots sont traitées à la fin de l'article.

Résumé du Journal météorologique du célèbre Astronome Tycho Brahe, tenu à Uraniborg, île de Hveen, pendant les années 1582—1597

par M. P. la Cour.

(Extrait d'un Résumé en danois qui accompagne le Journal météorologique de Tycho Brahe, Copenhague 1876, et que M. C. Holten a communiqué à l'Académie R. des sciences dans sa séance du 14 Janvier 1876, au nom du Comité météorologique de l'Académie.)

Ce journal, dont le manuscrit original se trouve à la Bibliothèque I. R. de Vienne sous le n° 10718, a été signalé par M. Friis et publié par l'Académie Royale Danoise des Sciences. Il se recommande non moins à cause de sa grande ancienneté que par le témoignage qu'il nous fournit de l'activité multiple déployée par le grand astronome, et, à ce double titre, il mérite qu'on le soumette à un examen approfondi pour vérifier si les éléments météorologiques, après environ 3 siècles écoulés, ont ou n'ont pas varié.

Comme on pouvait s'y attendre, les conditions qu'on exige aujourd'hui d'un journal de météorologie, à savoir la séparation des divers éléments, l'emploi d'échelles et d'instruments déterminés et la régularité des heures des observations, ne sont pas remplies dans le journal de Tycho Brahe, et, par suite, il a été nécessaire de procéder d'abord à un travail préliminaire pour classer chacune de ses observations et en fixer la valeur. On se trouve ici dans la même situation qu'un météorologiste qui, sans instruments, devrait apprécier les divers éléments, l'état du ciel, la direction et la force du vent, etc. En effet, on a comme lui des rubriques à remplir et des échelles d'après lesquelles on doit exprimer son jugement; mais tandis qu'il juge d'après les impressions que les phénomènes font sur ses sens, il faut juger ici d'après les phrases du journal. Les indications en sont quelquefois certaines, par ex. quand il s'agit de la direction du vent, de la pluie, de la gelée, des aurores boréales, etc.; mais quelquefois aussi elles sont assez vagues, par

ex. quand elles se rapportent à la force du vent. Il n'en faut pas moins émettre un jugement qui s'accorde avec les expressions employées dans le journal, afin de pouvoir en déchiffrer les phrases et inscrire les résultats en termes précis dans un registre ad hoc. J'ai procédé à cet enregistrement avant de calculer les valeurs moyennes, et, dans les calculs ultérieurs, j'ai laissé le registre lui-même absolument intact, n'y changeant pas un seul chiffre pour cause d'anomalies dans les valeurs définitives, même si ce chiffre était basé sur une phrase douteuse pouvant s'interpréter aussi bien dans un sens que dans l'autre. De cette façon, on peut, je crois, être sûr que les résultats ne présentent rien d'arbitraire, et, d'un autre côté, il est à présumer que des erreurs de jugement, si elles ne sont qu'accidentelles, n'influeront pas d'une manière sensible sur les valeurs moyennes, les seules dont il soit question dans ce résumé.

Mon registre était pour chaque jour divisé en 4 rubriques, chacune de 6 heures, dans lesquelles j'ai distribué toutes les observations du journal. Les jours, dans ce dernier, sont datés d'après le calendrier julien (en danois: «gl. Stil»), qui, à cette époque, était en retard de 10 jours sur le calendrier grégorien (en danois: «Ny Stil»). Quelques-uns des tableaux, dans la notice danoise, se rapportent au calendrier julien; mais partout où l'on a établi une comparaison avec les observations modernes, et, en général, dans tout le présent résumé, les résultats sont rapportés au calendrier grégorien.

Comme points de comparaison, on trouvera citées dans les pages suivantes diverses séries d'observations modernes tirées des ouvrages suivants:

«Tables météorologiques de l'Académie Royale Danoise des Sciences» C. Holten, 1871; Mémoire de M. Holten, publié dans les «Oversigt over det Kongl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger», livraisons de Février 1864, de Novembre 1864 et de Février 1865; les observations de la Société Royale d'Economie Agricole (résumées et publiées sous le titre de: «Femaarsberetning fra det Kgl. Landhusholdningsselskabs meteorologiske Comité» Paul la Cour, 1872).

L'état du ciel.

Pour indiquer l'état du ciel, j'ai employé les 3 signes \circ φ \bullet , qui signifient clair, demi-clair et couvert. Dans le tableau de la page VI¹⁾, j'ai calculé la fraction moyenne du ciel qui est couverte pendant chaque jour de l'année. Les moyennes mensuelles extraites de ce tableau et rapportées au calendrier grégorien, sont, avec celles de 14 stations danoises pendant les années 1861—1870, représentées sur la Fig. 1, où la courbe pleine correspond aux observations de Tycho Brahe (1582—1597).

Calend. grég.	Janr.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Déchr.
Hveen. . . .	0,70	0,65	0,61	0,56	0,49	0,56	0,56	0,58	0,59	0,66	0,73	0,74
14 stations .	,71	,64	,60	,48	,43	,46	,43	,47	,48	,55	,64	,70

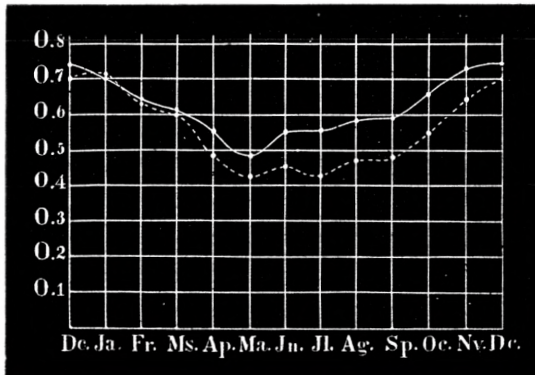


Fig. 1.

La marche annuelle dans les 2 séries est assez concordante, en ce qu'elle présente un minimum en Mai et un maximum en Décembre. Les observations anciennes donnent cependant des chiffres un peu plus forts que ceux des modernes; mais deux observateurs de nos jours pourraient avoir des écarts tout aussi grands et même plus grands.

¹⁾ La pagination en chiffres romains est celle du résumé danois qui accompagne le Journ. météorolog. de Tycho Brahe. Copenhag. 1876.

Les gros traits horizontaux indiquent les limites des mois, en passant du calendrier julien au calendrier grégorien.

Pluie, neige, grêle, brouillards.

L'usage du pluviomètre était naturellement inconnu à Hveen, mais on peut compter le nombre des jours pendant lesquels, suivant le journal, il est tombé de l'eau sous forme de pluie, de neige ou de grêle. La fréquence moyenne en a été calculée pour chaque jour de l'année dans le tableau de la page VIII (calendrier julien). La fréquence moyenne pour chaque mois, rapportée au calendrier grégorien, est représentée par une courbe pleine sur la Fig. 2, tandis que la courbe pointillée et la courbe formée de traits correspondent respectivement aux moyennes mensuelles de 14 stations danoises, pendant les années 1861—1870, et de Copenhague, durant une période de 52 ans.

Calend. grég.	Janr.	Févr.	Mars.	Avril	Mai.	Jun.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Décbr.
Hveen. . . .	0,29	0,25	0,31	0,25	0,21	0,36	0,37	0,38	0,33	0,34	0,35	0,34
14 stations .	,45	,46	,46	,35	,33	,38	,36	,46	,50	,51	,50	,49
Copenhague	,52	,50	,45	,41	,37	,42	,45	,47	,46	,50	,50	,50

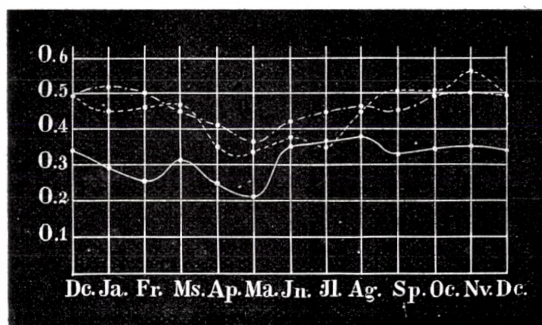


Fig. 2.

Comme on le voit, les nombres relatifs aux observations anciennes sont en général trop petits; mais il arrive souvent, surtout dans la dernière partie du journal, que le temps qu'il a fait pendant toute une journée est si brièvement décrit, qu'on a certainement pendant plusieurs jours oublié de noter qu'il est tombé de l'eau. Cependant les observations de Hveen et celles de Copenhague présentent dans leur marche annuelle une certaine ressem-

blance, à savoir un minimum en Mai, une augmentation jusqu'en Août et un faible minimum en Septembre. Par contre, le nombre des jours pendant lesquels il est tombé de l'eau dans les mois d'hiver et notamment en Février, est très petit dans la série de Hveen.

Il semble que les indications relatives à l'été ne sont pas aussi défectueuses que celles de l'hiver; cela résulte aussi de plusieurs circonstances que nous mentionnerons plus loin, et la raison en est peut-être que l'observateur était plus souvent de hors en été et pouvait par suite mieux observer le temps.

Fréquence des jours de pluie.

Calend. grég.	Janr.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Déabr.
Hveen. . . .	0,181	0,086	0,123	0,204	0,207	0,359	0,377	0,381	0,330	0,339	0,310	0,233
14 stations .	,329	,339	,242	,326	,318	,376	,359	,454	,481	,500	,519	,373

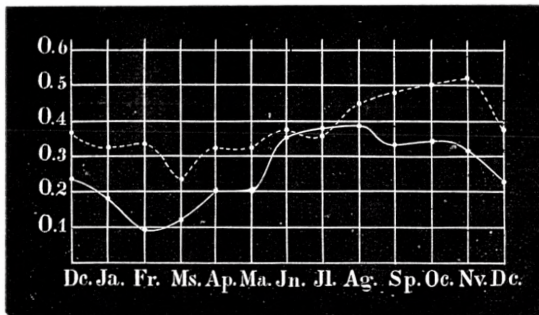


Fig. 3.

Les nombres relatifs à l'été sont les plus concordants; les 2 courbes présentent du reste plusieurs points de ressemblance, notamment le minimum à la fin de l'hiver et le temps d'arrêt d'Avril à Mai.

Fréquence des jours de neige.

Calend. grég.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Déabr.
Hveen. . . .	0,129	0,188	0,194	0,053	0,008	0	0	0	0	0,009	0,048	0,129
14 stations .	,120	,125	,177	,026	,012	0	0	0	0	,005	,040	,119

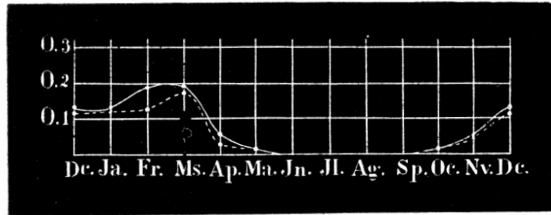


Fig. 4.

La marche annuelle est très concordante dans les 2 séries. Cependant le nombre des jours de neige en Février est plus grand dans l'ancienne que dans la moderne. On trouve un rapport inverse en ce qui concerne les jours de pluie, et il résulte de plusieurs circonstances dont nous parlerons plus loin, que le mois de Février a été relativement froid dans la série ancienne, mais quant à savoir si ces conditions météorologiques doivent s'appliquer à une période plus étendue que celle de 1582—1597, il n'est pas facile de le décider.

Fréquence des jours de grêle.

Le nombre des jours de grêle a été trop petit pour donner une marche annuelle; on trouve en effet les chiffres suivants:

Calend. grég.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Déabr.
Hveen. . . .	0,007	0,010	0,014	0,015	0,011	0,015	0,005	0,005	0,015	0,007	0,017	0,015
14 stations .	,010	,018	,016	,027	,023	,000	,003	,000	,003	,019	,010	,006

En prenant la moyenne des saisons, on obtient un accord plus grand, à savoir un maximum au printemps et en automne, et un minimum en été et en hiver

	Hiver	Printemps	Eté	Automne
Hveen.	0,011	0,014	0,008	0,013
14 stations . .	0,011	0,022	0,001	0,011

et, chose remarquable, la moyenne de toute l'année est exactement la même dans les deux séries, à savoir 0,011.

Fréquence des jours de brouillard.

Calend. grég.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Jun.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Déchr.
Hveen	0,190	0,104	0,102	0,041	0,045	0,021	0,043	0,034	0,051	0,064	0,062	0,141
14 stations .	,174	,129	,123	,100	,023	,020	,029	,029	,063	,097	,113	,158

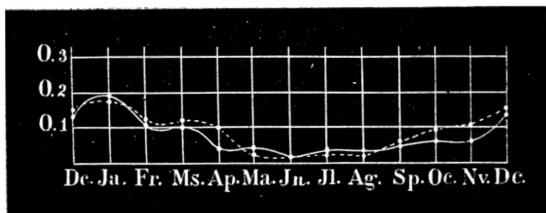


Fig. 5.

L'accord entre les 2 séries est ici très grand; on observe un minimum presque constant à la fin du printemps et durant tout l'été, et un maximum bien marqué et de courte durée en Janvier.

Il est très remarquable que le nombre des jours de gelée blanche présente un maximum tout semblable en Janvier.

Calend. grég.	Octbr.	Novbr.	Déchr.	Janvier	Février	Mars
Hveen	4	6	5	32	10	5

Des 10 jours de gelée blanche de Février, 7 correspondent en outre à la première pentade, et touchent ainsi au mois de Janvier, et sur les 32 jours de Janvier, il y en a 19 qui figurent en même temps parmi les jours de brouillard, de sorte que le maximum de la gelée blanche en Janvier provient du maximum du brouillard dans le même mois.

Direction du vent.

Je me suis borné aux 8 rums de vent N, NE, E, SE, S, SO, O et NO (en danois, N signifie Nord; S, Sud; Ø, Est et V, Ouest). L'observateur, il est vrai, indique souvent aussi les rums NNE, ENE, etc.; mais comme, en fin de compte, il aurait sans doute été nécessaire de les répartir également entre les rums principaux qui les comprennent, j'ai préféré le faire à mesure que j'enregistrais les indications du journal.

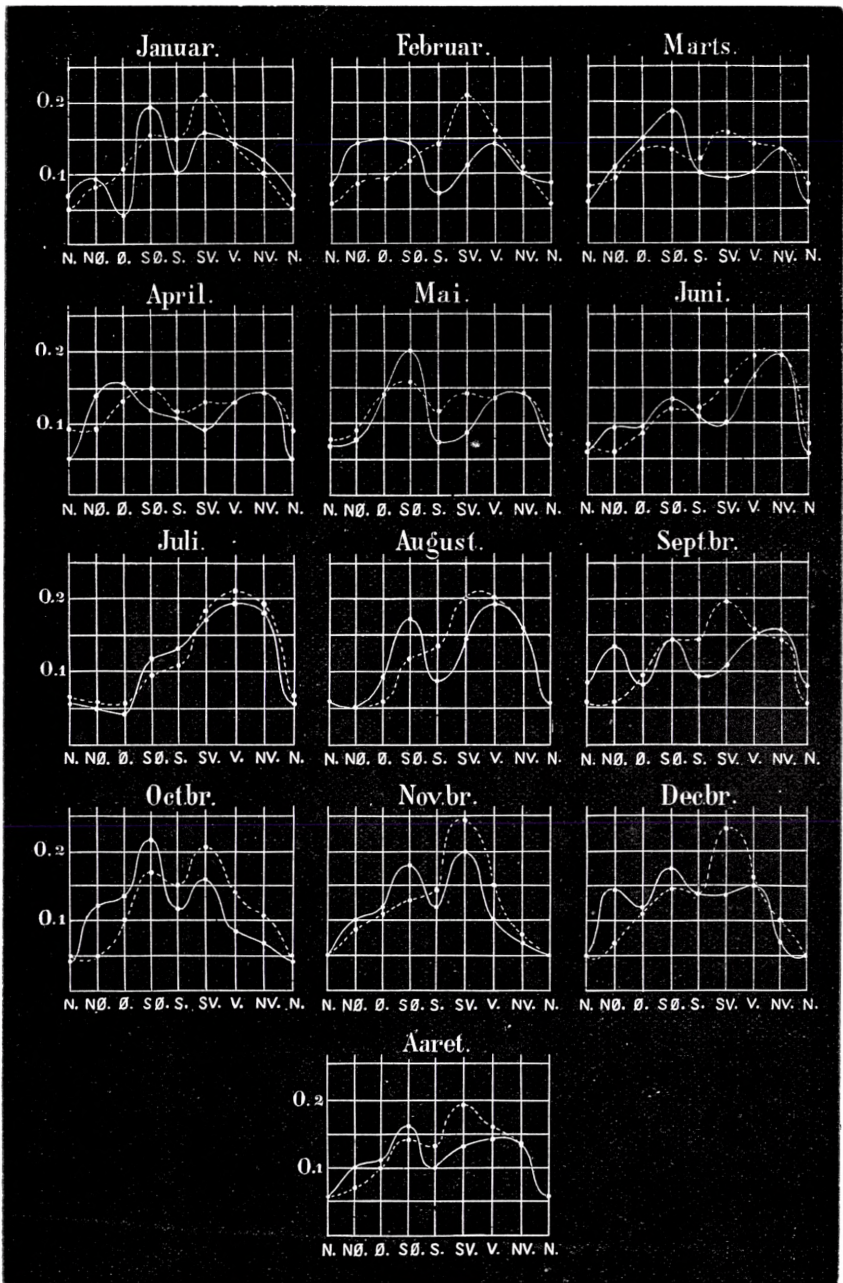


Fig. 6.

Les tableaux des pages XIII—XVIII donnent le nombre des rumbes de vent pour chaque jour de l'année (calendrier julien). Les moyennes mensuelles suivantes sont calculées d'après le calendrier grégorien :

Fréquence des vents.

Calend. grég.	N.	NE.	E.	SE.	S.	SO.	O.	NO.	Calme.
Janvier	0,07	0,09	0,04	0,19	0,10	0,16	0,14	0,12	0,08
Février	,08	,14	,15	,14	,07	,11	,14	,10	,08
Mars	,06	,11	,15	,18	,10	,09	,10	,13	,09
Avril	,05	,13	,16	,12	,11	,09	,13	,14	,08
Mai	,07	,07	,14	,20	,07	,08	,13	,14	,09
Juin	,06	,09	,09	,13	,11	,10	,17	,19	,07
Juillet	,06	,05	,04	,12	,13	,17	,19	,18	,06
Août	,06	,05	,09	,17	,08	,14	,19	,16	,06
Septembre	,08	,13	,08	,14	,09	,11	,15	,16	,07
Octobre	,04	,12	,13	,22	,12	,16	,08	,07	,06
Novembre	,05	,10	,12	,18	,12	,20	,10	,07	,05
Décembre	,05	,14	,12	,17	,13	,13	,15	,07	,04
L'année	0,06	0,10	0,11	0,16	0,10	0,13	0,14	0,13	0,07

La Fig. 6, p. 10, donne une représentation graphique de ces rumbes de vent pour chaque mois et pour toute l'année.

Si l'on examine d'abord les courbes de l'année (Aaret), on voit que, d'après les indications de Tycho Brahe, les vents du NO et du N étaient aussi fréquents que de nos jours, tandis que les vents d'Est (NE, E, SE) étaient plus fréquents, et ceux de Sud-Ouest (S, SO, O), moins. Le même accord a lieu chaque mois, bien qu'il ne soit pas aussi grand en été qu'en hiver; mais je ne saurais dire si cette anomalie tient à des causes locales ou à un changement séculaire des courants atmosphériques.

La grande concordance des courbes des mois d'été est due, je crois, à la circonstance qu'il faut un moins grand nombre d'étés que d'hivers pour donner des valeurs moyennes, et peut-être aussi à ce que les observations de l'été sont meilleures que celles de l'hiver.

Si l'on calcule d'après la formule de Lambert la direction et la grandeur de la résultante des rumbes de vent, la direction étant

donnée par l'angle, compté du N à l'E, que la résultante fait avec le méridien, on obtient les nombres de la page XXI. La grandeur de la résultante, comparée à celle de Copenhague, est représentée dans la figure suivante :

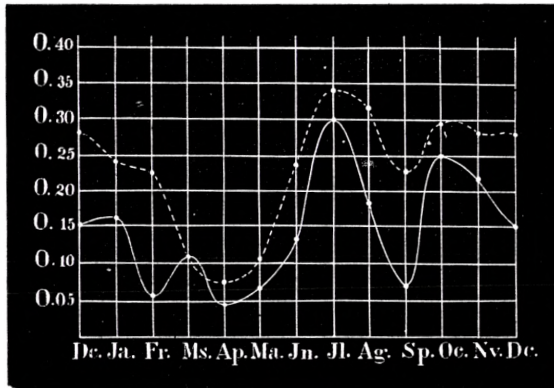


Fig. 7.

La grandeur de la résultante est naturellement maximum dans la série d'observations la plus longue, parce que dans celle-ci on se rapproche davantage de la résultante normale; mais les 2 courbes présentent du reste une grande concordance dans les mois d'été. On remarque: un minimum en Avril, mois pendant lequel les vents d'Est sont presque aussi fréquents que les vents d'Ouest, ce qui annule la résultante; un fort maximum en Juillet, lorsque les vents d'Ouest sont tout à fait dominants; un minimum en Septembre, les vents soufflant alors plus également de tous les côtés, et un maximum en Octobre, époque où les vents de SE et de SO sont dominants. En hiver, par contre, l'accord est moindre, et la résultante est surtout très petite en Février. En examinant les courbes de Février, Fig. 6, on voit que les vents d'Est (NE, E, SE) ont, pendant ce mois, été très fréquents à Hveen de 1582 à 1597. Ces vents d'Est sont sans doute en relation avec ce que nous avons dit plus haut du froid et de la neige observés par Tycho Brahe en Février.

Force du vent.

Les termes employés dans le journal pour indiquer la force du vent ne sont pas choisis d'après une échelle rationnelle, mais expriment seulement en façons de parler familières l'impression que la force du vent a faite sur l'observateur. Je me suis efforcé de les classer, comme on peut le voir p. XXIII—XXIV. Ils peuvent se traduire à peu près comme il suit en français :

0 = calme	g' = fort
1, = presque nul	g'' = très fort
1 = assez faible	s = tempête
g , = faible	s' = forte tempête
$g.$ = modéré	s'' = ouragan

g est une expression indéterminée qui ne doit pas entrer dans les calculs.

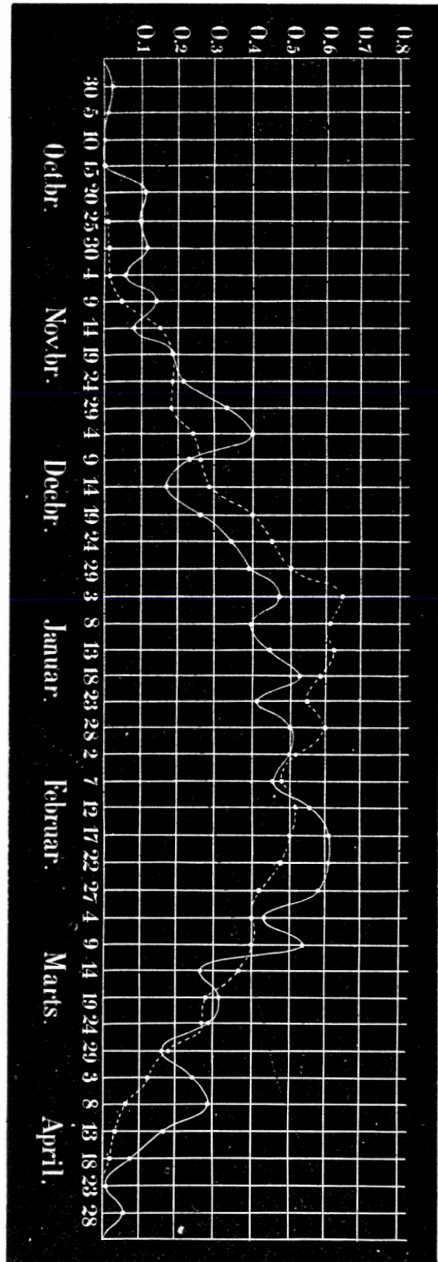
Les tableaux p. XXV—XXX (calendrier julien) donnent la force du vent pour chaque jour pendant toute l'année, et celui de la page XXXI (calendrier grégorien), les moyennes mensuelles; enfin on trouvera indiquée p. XXXII la force moyenne du vent, tant à Hveen que pour une période de 62 ans à Copenhague. Mais comme je crois qu'on ne peut attribuer à ces nombres une grande valeur, bien que j'aie dépouillé les observations avec le plus grand soin, je ne les discuterai pas dans ce résumé. J'en dirai autant des tempêtes et me bornerai à renvoyer au tableau de la page XXXIII, qui donne la fréquence des tempêtes pour chaque mois pendant la période 1582—1597, et à celui de la page XXXIV, qui a été calculé par M. Hoffmeyer, directeur de l'Institut météorologique de Copenhague, d'après les observations faites au phare de Hammershus, à Bornholm, pendant les années 1854—1865 et en 1871.

Chaleur.

Les observations de Hveen ayant été faites sans thermomètre, on ne pouvait pas s'attendre à tirer quelque profit des indications relatives à la température, et les tableaux p. XXXV et XXXVI des jours de chaleur et de froid offrent aussi peu d'intérêt. Mais

Fréquence des jours de gelée.

		Hreen.	Copenhag.
Septembre	30	0,03	0,00
Octobre	5	,01	,00
	10	,00	,00
	15	,00	,00
	20	,11	,00
	25	,09	,01
Novembre	30	,11	,01
	4	,06	,02
	9	,14	,05
	14	,08	,15
	19	,18	,19
Décembre	24	,21	,18
	29	,33	,18
	4	,40	,24
	9	,23	,26
	14	,17	,29
Janvier	19	,26	,40
	24	,34	,45
	29	,39	,50
	3	,47	,64
	8	,39	,61
Février	13	,44	,62
	18	,52	,58
	23	,41	,55
	28	,50	,60
	2	,50	,51
Mars	7	,46	,48
	12	,56	,51
	17	,61	,50
	22	,61	,47
	27	,53	,42
Avril	4	,43	,40
	9	,54	,40
	14	,27	,37
	19	,31	,28
	24	,29	,28
Mai	29	,17	,18
	3	,25	,12
	8	,29	,06
	13	,17	,04
	18	,08	,03
Juin	23	,02	,00
	28	,06	,00



il en est autrement des observations concernant la gelée, qui fournissent des résultats très intéressants.

Remarquons d'abord que ces observations ont pu être faites avec une exactitude pour ainsi dire égale à celle que donnent les instruments, parce que l'état de l'eau à l'air libre indique si la température est au-dessus ou au-dessous de zéro, et comme on a toujours plus de satisfaction à entreprendre des observations qui se peuvent faire avec exactitude, l'observateur de Hveen les a notées avec beaucoup de soin, chose dont on trouve aussi de nos jours un exemple dans la circonstance que la conversation journalière roule souvent sur la gelée ou le dégel, le sentiment populaire étant porté à voir dans la gelée un fait d'une nature plus positive, tandis qu'il attribue au dégel un caractère plus négatif. Voilà pourquoi les indications du dégel, dans le journal, se rapportent pour la plupart aux jours qui précèdent ou suivent immédiatement les jours de gelée, de sorte que c'est dans les mois les plus froids que ces indications (p. XXXVII—XXXVIII) sont les plus nombreuses.

Le tableau p. XXXVIII («Dage med Frost») donne le nombre des jours de gelée d'après le calendrier grégorien, et le tableau p. XXXIX, le rapport entre ce nombre et le nombre total des jours où il a été fait des observations. Mais comme ces nombres ne présentent pas encore une marche assez régulière, j'ai calculé p. 36 les moyennes pour les pentades, chaque pentade étant désignée par le jour intermédiaire correspondant. A côté, on trouve des moyennes semblables pour Copenhague, d'après les observations faites pendant 72 ans; mais les deux séries ne signifient pas tout à fait la même chose, celle de Hveen indiquant le nombre des jours pendant lesquels il a gelé, et celle de Copenhague, le nombre des jours dont la température moyenne a été au-dessous de zéro. Il est évident que plus sont grandes les oscillations diurnes de la température, plus est différente aussi la signification des nombres des 2 séries, car d'autant plus grand est le nombre des jours pendant lesquels il peut geler, tandis que la température moyenne des 24 heures est cependant au-dessus de zéro. Il faut donc passer légèrement sur la première et la dernière partie des courbes, comme les oscillations diurnes sont grandes aux temps correspon-

dants, et considérer principalement la période comprise entre le milieu de Décembre et le milieu de Mars. D'après ce qui précède, on devrait s'attendre à ce que les nombres de Hveen fussent plus grands que ceux de Copenhague, ce qui n'est pas le cas cependant en Décembre ni en Janvier, parce que les oscillations sont très petites pendant ces deux mois, de sorte que les nombres de Hveen ne sauraient être beaucoup plus grands; à cela il faut ajouter qu'on a sans doute oublié quelques annotations dans le journal de Hveen. Les 2 courbes (voir p. 36) présentent par contre un grand nombre de maxima et de minima qui correspondent aux mêmes dates. Mentionnons entre autres un accroissement uniforme du 14 Décbr. au 3 Janv., date où les 2 courbes ont un maximum, puis un minimum le 8, un maximum le 13 et le 18, lequel, vérification faite, appartient au 15, un minimum le 23, un maximum le 28, un minimum le 7 Février, enfin un maximum prolongé qui s'étend jusqu'à la fin de Février et un minimum le 4 Mars. Quoiqu'on ne puisse expliquer d'une manière satisfaisante ces maxima et minima qui sont particuliers à certains jours de l'année, tous les météorologues sont cependant unanimes à admettre qu'ils sont dus à de grands mouvements de l'atmosphère, et que certains états atmosphériques tendent à se reproduire aux mêmes jours de l'année. En se plaçant à ce point de vue, on arrive donc à constater ce fait très important pour la météorologie, que l'état général de l'atmosphère, rapporté au même calendrier, était le même il y a près de 300 ans que de nos jours.

Le tableau p. XLII donne les dates de la présence de glaces dans le Sund, autour de Hveen, pendant les hivers de 1582—1597.

Tonnerre.

Le tableau ci-dessous donne pour chaque mois la fréquence moyenne des jours où il a tonné; sur la Fig. 9, on a en même temps représenté les moyennes pour 14 stations danoises de 1861 à 1870.

Calend. grég.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Déabr.
Hveen . . .	0,000	0,003	0,000	0,003	0,025	0,053	0,043	0,034	0,015	0,000	0,000	0,000
14 stations .	,003	,003	,000	,000	,026	,053	,055	,055	,030	019	,003	,000

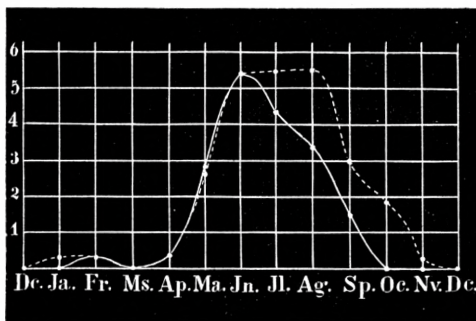


Fig. 9.

On voit qu'il y a une grande concordance de Novembre à Juin, avec un minimum se rapprochant de zéro en hiver et un maximum identique dans les 2 séries en Juin. Par contre, de Juillet à Octobre, on compte moins d'orages dans la série de Hveen que dans celle de Copenhague. Il n'est pas impossible que des changements topographiques en soient la cause.

Halos.

Le tableau ci-dessous donne la fréquence des jours pendant lesquels on a observé des phénomènes optiques dus à la réfraction ou à la réflexion des rayons du soleil ou de la lune sur des cristaux de glace, dans les hautes régions de l'atmosphère (les petits anneaux provenant de l'interférence des rayons lumineux dans des nuages bas n'y sont pas compris).

Calend. grég.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Déabr.
Hveen . . .	0,013	0,020	0,033	0,018	0,011	0,006	0,000	0,005	0,003	0,011	0,012	0,009

Je ne connais pour le Danemark aucune série moderne analogue qui puisse servir de terme de comparaison.

Aurores boréales.

Le tableau suivant donne le nombre des nuits où il y a eu des aurores boréales. Dans un petit nombre de cas, il ne ressort pas bien clairement des expressions employées dans le journal si le phénomène observé a été réellement une aurore boréale. Ces cas ont reçu la valeur $\frac{1}{2}$.

Cal. grég.	Janv.	Févr.	Mars	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Déchr.	L'année.
1582											1	1	2
83	"	"	"	"	1	"	"	3	2	7	5	"	18
84	7	2	2	3	1	"	"	"	"	1	"	"	16
85	"	1	"	"	"	"	"	1	"	"	"	1	3
86	"	1	$\frac{1}{2}$	"	"	"	1	"	1	1	"	"	$4\frac{1}{2}$
87	"	"	2	"	"	"	"	"	"	"	1	"	3
88	"	1	"	"	"	"	"	1	2	2	"	1	5
89	"	1	"	"	"	"	"	$\frac{1}{2}$	2	"	"	1	$4\frac{1}{2}$
90	1	2	2	"	"	"	"	1	$3\frac{1}{2}$	2	2	2	$15\frac{1}{2}$
91	"	1	2	1	"	"	"	"	"	"	"	"	4
92	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
93	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
94	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1	"	1
95	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
96	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
97	"	"	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1
Somme	8	9	$9\frac{1}{2}$	4	2	"	1	$5\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	13	10	6	$77\frac{1}{2}$

Comme points de comparaison, on trouve dans le tableau suivant la somme des aurores boréales résultant, d'après Kämtz (Lehrbuch der Meteorologie), d'observations faites dans 15 localités, ainsi que le nombre des aurores boréales observées à Christiania de 1837 à 1853 et à Upsal de 1739 à 1762 (Sur la physique du globe, Quetelet).

Marche annuelle des aurores boréales.

	Janv.	Févr.	Mars	Avril.	Mai.	Juin	Juillet.	Août.	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Décbr.
Hveen 1582—97	8	9	9½	4	2	0	1	5½	9½	13	10	6
Somme des 15 localités	229	307	440	312	184	65	87	217	405	497	285	225
Christiania 1837—53	46	61	75	60	3	0	1	35	78	65	55	55
Upsal 1739—62	66	105	106	50	7	1	10	71	100	111	79	77

La marche annuelle est la même dans la série ancienne que dans les modernes avec 2 maxima et 2 minima, dont le maximum d'Octobre et le minimum de Juin sont plus prononcés que le maximum de Mars et le minimum de Décembre.

La série ancienne, par contre, ne se prête pas à la détermination de la variation séculaire dans le nombre des aurores boréales, car le journal n'est pas tenu toutes les années avec le même soin ni le même détail; dans les dernières notamment, les annotations sont tellement brèves qu'il est à supposer qu'on a négligé d'inscrire plusieurs aurores boréales.

Déclinaison et inclinaison magnétiques calculées d'après les observations des aurores boréales.

On trouve enfin dans le journal quelques descriptions détaillées d'aurores boréales et de couronnes d'aurores boréales, avec l'indication très précise de leur position par rapport aux étoiles et de l'heure de leur apparition. Quelquefois la position est rapportée à une étoile déterminée, dont la hauteur et l'azimuth, au moment de l'observation, donnent la hauteur et l'azimuth de la couronne, et par suite une détermination de la déclinaison et de l'inclinaison magnétiques. Mais quand la position est indiquée par ex. ainsi: «inter Cygnum et Lyræ», j'ai d'abord marqué le lieu au juger sur un globe céleste, j'en ai mesuré les coordonnées (ascension droite et déclinaison), et j'en ai enfin déduit la hauteur et l'azimuth du lieu au moment de l'observation.

Le premier passage qui se prête à une pareille détermination est daté du 9 Août (Cal. jul.) 1583 et ainsi conçu :

I. *χασματα* inter Cygnum et Lynam congregabantur H. $9\frac{1}{4}$.

Le second passage est la continuation directe de cette phrase :

II. et demum inter H. $10\frac{1}{2}$ et 11 mirifice apud cor Cygni congredebantur.

NB. Dans le calcul, j'ai pris l'heure $10\frac{3}{4}$.

Le troisième passage, daté du 22 Avril (Cal. jul.) 1584, est ainsi conçu :

III. om nattenn epherminnat opkomme (après minuit se levaient) chasmata, som forsammeltis (qui convergeaient) supra verticem circa lucidam Lyræ.

NB. L'heure manque. Je n'ai donc pu calculer que la hauteur de cette étoile au moment de sa culmination.

Le quatrième passage, daté du 12 Décembre (Cal. jul.) 1585 porte :

IV. Chasmata H. 9 ad lucidam caudæ Cygni congrede videbantur.

Enfin, il y a un cinquième passage où il pourrait peut-être être question d'une couronne d'aurore boréale le même soir que IV ; on y lit en effet :

V. H. $9\frac{3}{4}$ apud lucidam Capellæ non procul a vertice distantem aliquamdiu consistere videbantur ;

mais l'emploi du verbe consistere rend déjà douteux qu'on ait affaire à une couronne d'aurore boréale.

Les calculs de la hauteur et de l'azimuth des 5 lieux indiqués dans ces passages donnent :

	Hauteur.	Azimuth.	Angle horaire.
I	$72^{\circ} 35'$	$5^{\circ} 40'$ E	— $0^h 9^m$
II	$72^{\circ} 10'$	$20^{\circ} 40'$ O	+ $0^h 32^m$
III	hauteur de la culmination $72^{\circ} 30'$	heure de la culmination $9\frac{3}{4}$ a. m.	$0^h 0^m$
IV	$36^{\circ} 55'$	$115^{\circ} 40'$ O	+ $5^h 44^m$
V	$76^{\circ} 25'$	$46^{\circ} 20'$ E	— $0^h 56^m$

Il est à remarquer qu'une petite inexactitude dans l'heure entraîne une grande erreur dans la détermination de l'azimuth, et

qu'il en est de même quand l'indication du lieu n'est pas tout à fait exacte, la faible distance zénithale ayant pour conséquence que l'erreur augmente dans la détermination des azimuths. Ceux ci sont par suite contradictoires et ne peuvent servir. Mais, d'un autre côté, la hauteur n'est affectée que très faiblement par une erreur dans l'indication du temps, et une inexactitude dans la détermination du lieu n'entraîne pas une erreur plus grande dans la hauteur. Celle-ci peut donc mieux servir, et la hauteur de la culmination dans III ne différera par suite que très peu de la hauteur réelle de la couronne, si l'azimuth de celle-ci tombe seulement en deçà de limites tant soit peu naturelles. Mais IV ne peut pas du tout servir, car, dans une position si anormale, il ne saurait évidemment être question d'une véritable couronne d'aurore boréale; enfin, en ce qui concerne V, nous avons vu que les expressions employées dans le journal donnent lieu de douter que le lieu désigné ait été le centre d'une couronne.

Si l'on s'en tient aux 3 premières déterminations de hauteurs, elles donnent, avec un accord plus grand qu'on n'eût pu s'y attendre, respectivement $72^{\circ} 35'$, $72^{\circ} 10'$ et $72^{\circ} 30'$, soit $72^{\circ} 25'$ en moyenne. Si l'on prend aussi la cinquième détermination, la moyenne devient $73^{\circ} 25'$. Comme de la fin du XVIe siècle et de tout le XVIIe on ne possède que très peu de mesures de l'inclinaison magnétique, et qu'elles présentent un grand désaccord — de plusieurs degrés — à cause de la difficulté de ces mesures avec les moyens en usage à cette époque, la hauteur de la couronne, qu'on prenne $72^{\circ} 25'$ ou $73^{\circ} 25'$, peut certainement être considérée comme une détermination relativement bonne de l'inclinaison dans l'année 1584.

FONDS DE CARLSBERG.

A

l'Académie Royale Danoise des Sciences et des Lettres.

A mesure que les travaux des hommes de science enrichissent les industriels de connaissances nouvelles, et leur donnent des notions plus exactes des lois naturelles, on reconnaît de plus en plus la nécessité absolue de ces connaissances et le besoin de les étendre, notamment dans les directions spéciales qui intéressent particulièrement les diverses branches d'industrie.

Mais, comme on ne saurait demander ni attendre des savants attachés aux établissements d'instruction publique, qu'ils s'engagent dans des recherches sur tous les points que les industriels désirent voir éclaircis, on a, dans ces derniers temps, commencé à établir dans plusieurs pays des laboratoires spéciaux, ou, comme on les appelle en Allemagne, des «Versuchsstationen», qui ont pour objet de fournir aux industries correspondantes des connaissances plus complètes et plus approfondies.

Ces établissements ont assurément été d'une grande utilité, également en ce qui concerne l'art du brasseur; mais, en général, ils laissent cependant beaucoup à désirer. En effet, ils ont presque tous le défaut que leur existence est incertaine et n'a qu'un caractère temporaire, ce qui entraîne de fréquentes mutations parmi les savants qui y sont attachés, et dont les études et travaux préparatoires sont par suite exposés à rester stériles. De plus, leur programme est le plus souvent beaucoup trop limité, de sorte qu'ils ne donnent pas l'occasion de développer, et permettent à peine de conserver l'aptitude scientifique générale qu'exige leur direction, et, réciproquement, ce programme comprend quelquefois trop d'autres choses, par ex. un enseignement

très élémentaire — comme dans les « Brauschulen » des Allemands — qui ne laisse ni le temps ni la tranquillité nécessaires pour les recherches scientifiques proprement dites, sans parler d'un supplément d'occupations purement industrielles, telles que analyses sur commande, émission de certificats, etc.

Guidé par ces considérations, j'ai, comme annexe à ma brasserie de Carlsberg, fondé un laboratoire destiné à des recherches et à des études chimiques et physiologiques, dans les branches des sciences naturelles qui ont surtout de l'importance pour les opérations du maltage, du brassage et de la fermentation, et ayant pour but non-seulement de fournir à la technique de l'art du brasseur son pain quotidien, mais aussi de donner à ceux qui cultivent la science l'occasion et les moyens de se perfectionner, et de devenir des spécialistes dans les directions que les opérations de la brasserie et les phénomènes qu'elles présentent donneront lieu de poursuivre.

Pour diriger les travaux de ce laboratoire, j'ai engagé **M. Kjeldahl** comme chimiste, et **M. R. Pedersen** comme physiologiste. Il leur sera plus tard donné des aides pour les assister, soit dans les séries d'observations et d'analyses qu'il y aura lieu d'entreprendre dans l'intérêt de la technique, soit dans les travaux de laboratoire d'un caractère purement scientifique. Ces aides pourront ainsi, suivant leurs aptitudes et leur vocation, travailler à devenir d'habiles praticiens ou des hommes de science proprement dits.

Par contre, j'ai pensé que le laboratoire ne doit pas être une institution pour des élèves.

Mais comme un pareil établissement, fondé en vue d'études spéciales, ne peut prospérer que s'il s'appuie sur la science et est pénétré de la lumière qui en émane, et que cette lumière a été pour moi une source de bonheur et de bien-être, j'ai à cœur, pour acquitter une partie de ma dette, de contribuer également à l'avancement des sciences en général, notamment dans les branches auxquelles il me semble que l'Etat n'a pas consacré jusqu'ici, ni ne pourra peut-être consacrer à l'avenir tous les moyens nécessaires.

J'ai par là en vue: des honoraires temporaires à de jeunes savants que leurs talents et leur vocation rendent particulièrement aptes à occuper plus tard des postes de docent; des honoraires ou un traitement fixe à des hommes parfaitement préparés pour

faire des recherches et des publications scientifiques, et qu'il serait désirable de voir se consacrer entièrement à ces travaux, sans en être détournés par les soins de l'enseignement ou d'autres occupations; des subventions de voyage à des savants d'une réputation déjà bien établie qui, dans des excursions courtes et répétées à l'étranger ou dans des voyages de plus longue durée, pourront recueillir des résultats féconds pour l'érudition danoise; enfin des rétributions pour l'avancement de différents travaux scientifiques, tels que des recherches et des réponses à des questions qu'il importe de résoudre dans un temps donné, etc.

Avec ce but plus étendu devant les yeux, j'ai, à la date de ce jour, sous le nom de «Fonds de Carlsberg», institué un fonds auquel j'ai donné une hypothèque de 1 million de Couronnes sur ma propriété de Carlsberg, lequel capital donnera un intérêt de 5 p % par an, toutefois avec la réserve que cet intérêt ne sera intégralement payé qu'après ma mort et celle de ma femme, et qu'aussi longtemps que l'un de nous vivra, il ne sera servi qu'une rente annuelle de 2 p %. Jusqu'à nouvel ordre, le fonds jouira donc seulement d'un revenu annuel de 20,000 Cour., et ce n'est qu'après ma mort et celle de ma femme qu'il disposera de la totalité des intérêts, soit 50,000 Cour.

Mais pour qu'une pareille fondation puisse répondre à sa destination dans le présent et dans l'avenir, il faut lui assurer à perpétuité une direction composée de capacités scientifiques, et, à cet égard, la pensée se porte nécessairement sur la Société où la science danoise a trouvé jusqu'ici et trouvera certainement toujours ses représentants les plus distingués, et qui, chez nous, est la seule institution qui soit indépendante de toute influence étrangère non scientifique, je veux parler de l'Académie Royale Danoise des Sciences et des Lettres.

J'ai donc l'honneur de m'adresser à cet illustre corps, et le prie, en désignant quelques-uns de ses membres pour diriger ma fondation, de vouloir bien en assurer l'existence dans le présent et dans l'avenir, et veiller à ce qu'elle profite toujours à la science et fasse honneur au Danemark.

Afin que l'Académie puisse se faire une idée plus nette de la nature de cette fondation et du plan de son activité, j'ai l'honneur de lui remettre ci-inclus le projet des Statuts du fonds, lequel a en partie été rédigé d'après les conseils de M. M. les

professeurs Steenstrup et Barfoed, dont je ne saurais trop apprécier l'obligeance et l'intérêt qu'ils portent à cette affaire.

Dans l'espoir que mon entreprise recevra l'approbation de l'Académie, et qu'elle prètera à la nouvelle institution l'appui qui est indispensable à son existence et à ses progrès, je la prie de vouloir bien agréer

l'assurance de ma considération très distinguée

J. C. Jacobsen,
brasseur.

Carlsberg, le 25 Septembre 1876.

Statuts du fonds de Carlsberg.

- § I. Par acte en date de 25 Septembre 1876, j'ai donné à ce fonds un capital de 1 million de Couronnes, garanti par une hypothèque sur ma propriété de Carlsberg, comprenant les terrains inscrits sous les nos 19 c, e, f et g et 20 c, à Valby, avec les constructions, l'inventaire et le jardin qui s'y trouvent. Ce capital donnera un intérêt de 5 p 0/0 par an, mais cet intérêt ne sera payé intégralement qu'après ma mort et celle de ma femme, et aussi longtemps que l'un de nous vivra, il sera seulement servi une rente annuelle de 2 p 0/0, soit en tout 20,000 Couronnes.
- § II. Le fonds de Carlsberg a pour but:
- A. de continuer et d'étendre les travaux du laboratoire de chimie et de physiologie que j'ai fondé en 1875 à Carlsberg, conformément au programme de cet établissement (voir § VIII);
 - B. de contribuer à l'avancement des diverses sciences naturelles, des mathématiques, de la philosophie, de l'histoire et de la linguistique, ainsi qu'il est indiqué plus loin (voir § IX).
- § III. Aussi longtemps que le revenu annuel du fonds ne s'élèvera qu'à 20,000 Cour., cette somme, déduction faite

des frais d'administration, devra avant tout être employée à couvrir les dépenses du laboratoire. L'excédant pourra être appliqué à B.

- § IV. Lorsqu'après ma mort et celle de ma femme la rente entière du capital deviendra disponible, le revenu du fonds, déduction faite des frais d'administration, sera réparti également entre les sections A et B (cfr. § II). Elles supporteront de même par moitié les frais d'administration.

Au cas que l'une des sections A ou B n'ait pas l'emploi de tout son revenu annuel, l'excédant sera provisoirement mis en réserve pour servir à son usage au fur et à mesure de ses besoins, ou pour être appliqué à des entreprises reconnues nécessaires qui exigeraient un assez grand capital.

Cependant, s'il devient évident que la réserve de l'une des sections A ou B restera sans emploi, elle pourra être appliquée à l'autre section, si la direction tout entière y consent.

- § V. Le fonds est administré par une direction composée de 5 membres élus par l'Académie Royale Danoise des Sciences et des Lettres, et pris dans son sein. Ils sont nommés pour 10 ans. Tous les deux ans, il y a un membre sortant, qui, dans la première période décennale, est désigné par le sort. Il peut être réélu. Si un membre meurt ou donne sa démission avant l'expiration de son mandat, son remplaçant est nommé pour le temps qu'il avait encore à rester en fonctions. La direction nomme dans son sein un président après chaque élection ordinaire d'un directeur. Elle fait elle-même son règlement.
- § VI. Trois membres de la direction sont, avec 1 ou 2 adjoints, spécialement chargés de l'inspection du laboratoire. Ces trois membres doivent être versés dans les sciences naturelles. Le ou les adjoints sont élus par l'Académie parmi des hommes qui n'en font pas partie, et qu'en raison de leur connaissance de l'art du brasseur ou pour d'autres motifs, on doit supposer être familiers avec le genre de travaux dont s'occupe le laboratoire, et y porter

de l'intérêt. Ils sont nommés pour 5 ans et peuvent être réélus.

Ce comité du laboratoire fait lui-même son règlement et nomme son président, qui reste en place jusqu'à ce que son mandat comme directeur soit expiré.

§ VII. Les membres de la direction reçoivent chacun par an 400 Couronnes d'honoraires. Les trois directeurs chargés du laboratoire touchent en outre chacun un supplément de 300 Cour. A chaque poste de président est attaché un traitement de 200 Cour. Les adjoints ont chacun 300 Cour.

§ VIII. Le laboratoire de Carlsberg doit avoir pour objet de vérifier par des recherches originales les doctrines déjà établies par la science, et de les développer par des études suivies, de manière à en former une base scientifique aussi complète que possible pour les opérations du maltage, du brassage et de la fermentation.

En ce qui concerne les aides du laboratoire, on veillera à ce qu'il puisse peu à peu se former parmi eux des spécialistes, dans les branches de la chimie et de la physiologie qui se rattachent à l'art du brasseur.

Parmi les travaux dont le laboratoire aura à s'occuper, figurent entre autres pour le moment :

- a. Des recherches tant chimiques que physiologiques sur les grains qui peuvent être employés dans le brassage, spécialement l'orge et ses variétés, et sur les causes de leurs différentes propriétés, telles que le climat, le sol, le mode de culture, le degré de maturité, etc.
- b. Des recherches analogues sur le houblon, sur les méthodes à employer pour en déterminer les principes actifs, sur les caractères et le mode d'action de ces substances pendant le brassage et la fermentation.
- c. Une étude approfondie des substances dont se composent les grains, notamment de l'amidon et de ses dérivés, la dextrine, le sucre etc., ainsi que des matières albuminoïdes, de leur rôle et de leurs trans-

formations pendant les opérations du brassage, par exemple :

pendant le maltage (délayement, germination et séchage) et avec l'emploi de différentes méthodes; pendant la trempé et l'ébullition (méthodes d'infusion et de décoction, ébullition à feu direct, à la vapeur, sous pression, etc.);

pendant le refroidissement (influence de l'air atmosphérique, systèmes divers, théories de Baudelot et de Pasteur, etc.);

pendant la fermentation, suivant les différentes méthodes de maltage et de brassage.

- d. Des recherches sur la levûre, sur son développement, sa nature et son action dans des conditions différentes et dans les diverses phases de la fermentation, ainsi que sur l'influence de l'air, de la lumière, de la chaleur et de l'électricité.
- e. Des recherches sur les autres ferments qui peuvent prendre naissance pendant la fermentation, tels que les ferments lactique, acétique, butyrique etc.
- f. Des recherches sur le produit final, la bière, sur ses propriétés et les conditions à remplir relativement à son goût, à sa conservation et à son amélioration, etc.
- g. Des recherches sur les causes des fréquentes irrégularités qui se présentent dans les opérations du brassage, et, en général, de tous les phénomènes particuliers.
- h. La vérification des observations et des découvertes faites par d'autres savants, ainsi que des hypothèses et des théories auxquelles elles servent de base.

Les résultats ainsi acquis seront publiés dans des revues danoises ou étrangères, ou d'une autre manière, en partie pour rendre compte au public des travaux du laboratoire, en partir pour constater vis-à-vis de l'étranger que le Danemark contribue pour une part honorable à l'avancement de la science dans les branches dont il est question ici. Aucun résultat ayant quelque importance théorique ou pratique ne devra être tenu secret.

Il va sans dire que les chefs du laboratoire, tout en s'occupant des travaux particuliers à cet établissement, devront, par d'autres études et d'autres recherches, s'efforcer de cultiver et de développer leurs aptitudes scientifiques en général, de manière toutefois à ne pas négliger ni perdre de vue le but principal du laboratoire.

En tant que les ressources disponibles le permettront, et que le comité le jugera opportun, les chefs du laboratoire feront de temps à autre des voyages pour nouer des relations personnelles avec les savants qui, dans d'autres pays, s'occupent d'études analogues, et pour visiter les établissements correspondants de l'étranger et prendre connaissance de leurs travaux.

Le laboratoire ne doit pas faire l'office d'école de brasseur pour des élèves sans instruction scientifique préliminaire; il ne fera non plus d'analyses ni n'émettra de certificats pour des personnes étrangères à l'établissement.

§ IX. La somme destinée à l'avancement des sciences en général (conf. §§ II B, III et IV) sera principalement employée:

- a. En subventions de voyage jusqu'à concurrence de 3000 Cour. en faveur de savants d'une réputation déjà bien établie, soit pour plusieurs courtes excursions à l'étranger, soit pour des voyages de plus longue durée;
- b. En honoraires temporaires à de jeunes savants qui, par leurs facultés et leur vocation, sont particulièrement aptes à remplir plus tard des fonctions publiques;
- c. En rétributions viagères ou à temps à des hommes distingués qui, en dehors de toute fonction publique et comme «savants libres», peuvent rendre des services à la science;
- d. En subventions ou honoraires jusqu'à concurrence de 2000 Cour. pour des études ou des recherches spéciales;
- e. En contributions à l'avancement de travaux scientifiques.

Les dispositions qui précèdent s'appliquent indistinctement aux personnes qui sont ou ne sont pas membres de l'Académie, de même qu'aux travaux exécutés dans le sein ou en dehors de ce corps.

- § X. Le direction administre les revenus du fonds. Elle fait, sous son contrôle, tenir les livres et la caisse par un comptable salarié, dont les comptes sont revisés par 2 directeurs. Ils sont ensuite soumis à l'approbation de la direction, qui en donne quittance.

Celle-ci arrête le budget annuel, et fixe l'emploi de la somme destinée à l'avancement des sciences, conformément au § IX.

Elle adresse à l'Académie un rapport annuel sur l'emploi du fonds et les travaux du laboratoire, en l'accompagnant d'un aperçu des revenus, des dépenses et de la situation du fonds.

Elle présente à l'Académie pour les places d'adjoints au comité du laboratoire.

- § XI. Le comité du laboratoire a la haute inspection sur les travaux, les locaux, l'inventaire etc. de cet établissement.

Il nomme les chefs du laboratoire, avec faculté pour les deux parties de se dédire en se prévenant un an à l'avance.

Après s'être concerté avec les chefs du laboratoire, il engage les aides nécessaires en se réservant de les congédier après trois mois d'avis.

Il veille à ce que le plan des travaux du laboratoire, tel qu'il est fixé par les statuts, soit exactement suivi. Sans empiéter sur les droits des chefs du laboratoire comme hommes de science, il discute avec eux l'exécution des travaux qui peuvent jeter du jour sur certaines opérations spéciales du brassage, etc.

Il dresse le budget annuel du laboratoire, et veille à son maintien.

Il soumet à la direction des propositions relatives à des mesures extraordinaires en dehors du budget ordinaire, et à l'emploi de la réserve du laboratoire.

- § XII. Les chefs du laboratoire auront à se perfectionner dans les branches de la science qui ont spécialement de l'im-

portance pour le brassage de la bière, soit par les observations et les recherches auxquelles les opérations de la brasserie donnent lieu, soit par des études et des travaux dans le laboratoire.

Ils adresseront au comité un rapport détaillé annuel sur les travaux du laboratoire, et rédigeront les articles relatifs à ceux de ces travaux qu'il jugera convenable de publier. Les frais de ces publications seront supportés par le budget du laboratoire, et le bénéfice, s'il y en a, reviendra à l'auteur.

Aussi longtemps qu'ils seront attachés au laboratoire, il leur est interdit d'être les conseillers d'autres personnes, et d'entreprendre d'autres travaux soit pour leur compte, soit pour des particuliers. Ils ne pourront non plus se charger d'un emploi public sans le consentement du comité, et si celui-ci juge qu'un pareil emploi est désirable et se concilie avec les intérêts du laboratoire, il pourra faire dépendre son consentement d'une réduction proportionnelle de leur traitement annuel.

Ils ne doivent pas se porter comme candidats aux élections du Rigsdag.

Ils engagent et congédient les employés subalternes, et veillent au bon ordre dans le laboratoire.

Ils décident de l'emploi des sommes portées au budget qui sont mises à leur disposition pour les dépenses courantes, et en rendent compte au comité.

§ XIII. Les chefs du laboratoire jouissent au minimum du même traitement que les professeurs de l'université de la même ancienneté, mais ils n'ont pas droit à une pension de retraite. Cependant, dans des circonstances spéciales, la direction pourra, sur la proposition du comité, leur accorder un secours temporaire ou viager.

§ XIV. Si, dans le cours du temps, la direction juge nécessaire de modifier ces statuts, elle soumettra à l'Académie un projet relatif aux changements dont tous ses membres seront tombés d'accord, et celle-ci prendra alors une résolution à cet égard. Si l'Académie propose des amendements au projet de la direction, elle ne pourra se

prononcer définitivement sur ces amendements que dans une nouvelle séance, qui aura lieu 4 semaines après que la direction l'aura informée qu'elle les a acceptés à l'unanimité.

Il ne faudra cependant jamais perdre de vue le but du laboratoire de Carlsberg (§ VIII), et cet établissement devra toujours rester attaché à la propriété de Carlsberg aussi longtemps qu'on y fabriquera de la bière. Le laboratoire ne devra jamais non plus être fusionné avec un autre établissement.

Carlsberg, le 25 Septembre 1876.

J. C. Jacobsen.

Le 25 Septembre 1876, jour où a été inaugurée la statue de H. C. Ørsted, et auquel M. J. C. Jacobsen a voulu rattacher la date de sa fondation, tous les membres de l'Académie ont reçu un exemplaire de la lettre et des statuts qui précèdent, et ont été convoqués en séance extraordinaire pour le 29 Septembre.

Dans cette séance, l'Académie a accepté à l'unanimité la mission si honorable que M. J. C. Jacobsen lui avait destinée, et chargé une députation d'aller le remercier du don magnifique qu'il avait fait à sa patrie, et de la confiance qu'il avait témoignée à l'Académie.

Dans une autre séance extraordinaire, tenue le 27 Octobre, l'Académie, conformément au § V des statuts, a élu directeurs du fonds de Carlsberg 5 de ses membres: MM. Barfoed, Holm, Madvig, Panum et Steenstrup, et trois d'entre eux, MM. Barfoed, Panum et Steenstrup, ont été chargés de l'inspection du laboratoire (§ VI). Sur leur proposition et sur l'invitation de l'Académie, M. J. C. Jacobsen et M. Kogsbølle, codirecteur de la brasserie de Carlsberg, sont entrés dans le comité du laboratoire en qualité d'adjoints.

M. J. N. Madvig a été élu président de la direction du fonds de Carlsberg, et M. C. Barfoed, président du comité du laboratoire.

1876—78.